કલનગણિત (Calculus) છે શું ?

વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ

પ્રસ્તાવના

અમેરિકાના પ્રખ્યાત નવલકથાકાર હર્મન વૉક (Herman Wouk) હતા. તેમને બીજા વિશ્વયુદ્ધને લગતી નવલકથાઓ લખવી હતી. બીજા વિશ્વયુદ્ધમાં ઍટમ બૉમનો ઉપયોગ થયેલો. આ ઍટમ બૉમ બનાવવા માટે અમેરિકામાં મેનહટ્ટન પ્રૉજેક્ટ (Menhattan Project) હતો. આ પ્રૉજેક્ટ ઉપર કામ કરવા માટે અમેરિકાએ સારી યુનિવર્સિટીઓના ભૌતિકશાસ્ત્રીઓને એકઠા કરેલા અને તેમણે ઍટમ બૉમ બનાવેલો. આથી આ નવલકથાકારને મૅનહટ્ટન પ્રૉજેક્ટના વિશે ઘણું બધું જાણવું હતું. આ નવલકથાકાર હર્મન વૉક હતા અને તેમનો જન્મ મે 27, 1915માં ન્યૂયૉર્કમાં થયેલો અને તેમનું નિધન હમણાં જ એટલે કે મે 27, 2019માં પામ સ્પ્રિન્ગ (Palm Springs) કેલિફૉર્નિયામાં થયેલું. હર્મન વૉકે આ પ્રૉજેક્ટમાં કામ કરનારા અમેરિકાના ખૂબ જ પ્રસિદ્ધ અધ્યાપક રૉબર્ટ ફેઇનમેન (Robert Feynman)નો ઇન્ટર્વ્યૂ લીધો. બધું કામ પૂરું થયું, અને હર્મન વૉક રૉબર્ટ ફેઇનમેનની ઑફિસમાંથી બહાર નીકળવા જતા હતા ત્યારે ફેઇનમેને પૂછ્યું, ‘‘તમે કલનગણિત (Calculus) જાણો છો ?’’ વૉકે જણાવ્યું કે તેમને કલનગણિત શું છે તેનો જરાયે ખ્યાલ નથી. ફેઇનમેને કહ્યું, ‘‘તમે કલનગણિત શીખો કારણ કે ભગવાન તે ભાષામાં વાતો કરે છે.’’ વૉકે વિશ્વયુદ્ધને લગતી બે નવલકથાઓ ‘The Winds of War’ અને ‘War and Remembrance’ લખ્યા પછી કલનગણિત જાતે શીખવાનો ખૂબ જ પ્રયત્ન કર્યો. તેમણે Calculus Made Easy અને બીજાં ઘણાં પુસ્તકોમાંથી કલનગણિત શીખવાનો પ્રયત્ન કર્યો, પણ સફળતા ન મળી. આથી તેમને પોતાને શીખવવા માટે ઇઝરાયલના ગણિતના ખાનગી શિક્ષક (ટ્યુટર) રાખ્યા પણ કલનગણિતમાં ચાંચ ન ડૂબી. આથી આખરે હાઈસ્કૂલના કલનગણિતના ક્લાસમાં જવાનું શરૂ કર્યું, પણ તેમાં તે ખૂબ જ પાછળ પડી ગયા અને આખરે ક્લાસમાં જવાનું છોડી દીધું અને વિદ્યાર્થીઓએ તેમને તાલીઓથી વધાવી લીધા. તેમણે ‘The Language God Talks : On Science and Religion’માં આનો ઉલ્લેખ પણ કર્યો છે.

કલનગણિત છે શું ? શા માટે ફેઇનમેને નવલકથાકાર હર્મન વૉક જેવાને કલનગણિતનો અભ્યાસ કરવા જણાવ્યું તે જોઈએ.

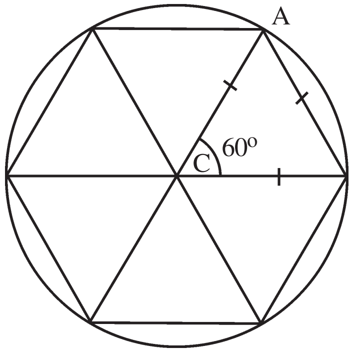
કલનગણિત (Calculus)

કલનગણિતને અંગ્રેજીમાં ‘કેલ્ક્યુલસ (Calculus)’ કહેવામાં આવે છે. અંગ્રેજી શબ્દ કેલ્ક્યુલસ્નું મૂળ લેટિન ભાષાનો શબ્દ ‘Calx’ છે. લેટિન ભાષામાં ‘Calx’ શબ્દનો અર્થ નાનો પથ્થર. જૂના જમાનામાં લોકો ગણવા માટે નાના પથ્થરો વાપરતા. દાંતના દાક્તરો દાંત ઉપર રહેલા ક્ષારો માટે પણ ‘કેલ્ક્યુલસ (Calculus)’ શબ્દ વાપરે છે, તે જ પ્રમાણે દાક્તરો ગૉલ સ્ટોન્સ (Gall Stones), કિડની સ્ટોન્સ (Kidney Stones) અને બ્લૅડર સ્ટોન્સ (Bladder Stones) માટે પણ કેલ્ક્યુલસ શબ્દ વાપરે છે.

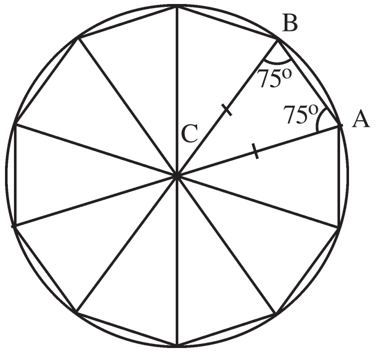
કલનગણિતનું મુખ્ય કામ જટિલ પ્રશ્નોને સરળ બનાવવાનું છે. કલનગણિત આ કામ કઈ રીતે કરે છે ? જટિલ પ્રશ્નને નાના પ્રશ્નોમાં વહેંચી નાખવા. જેમ કે, આપણે વર્તુળનો પરિઘ મેળવવો છે. જટિલ પ્રશ્ન છે, પણ આપણે

પરિઘને નાના ટુકડાઓમાં વહેંચી શકીએ. આ ટુકડાઓ ખૂબ જ નાના હોઈને, આપણે તે ટુકડાઓને સુરેખા કહી શકીએ. આ સુરેખાની લંબાઈ આપણે મેળવી શકીએ. ટૂંકમાં આપણે આ બધા ટુકડાઓની લંબાઈનો સરવાળો કરીને પરિઘની લંબાઈ મેળવી શકીએ. આ ભાગ અઘરો છે, પણ મૂળ પ્રશ્નના જેટલો અઘરો નથી.

વર્તુળના પરિઘની લંબાઈ



આકૃતિ 1 (a)



આકૃતિ 1 (b)

આકૃતિ 1માં વર્તુળ જેનું કેન્દ્ર c અને ત્રિજ્યા r છે તે આપેલું છે. આપણે આ વર્તુળનો પરિઘ મેળવવાનો છે. પ્રશ્ન જટિલ છે. આપણે પરિઘના નાના ટુકડાઓ કરીએ. આ ટુકડાઓ ખૂબ જ નાના હોઈને, તેમને સુરેખા ગણી શકીએ. ખૂબ જ નાના ટૂકડાઓનો સરવાળો કરવાનું અઘરું છે, પણ મૂળ પ્રશ્ન જેટલું અઘરું નથી.

આપણે શરૂઆતમાં વર્તુળના પરિઘના છ સરખા ભાગ કરીને આકૃતિ 1માં બતાવ્યા પ્રમાણે ષટ્કોણ (Hexagon) દોરીએ. આ શરૂઆત જ છે. રીતનો ખ્યાલ આવે તે માટે જાણીતાં પરિણામોથી શરૂઆત કરીએ છીએ. આ ષટ્કોણની છ બાજુઓનો સરવાળો પરિઘ કરતાં ઘણો ઓછો છે. ષટ્કોણની બાજુઓની લંબાઈ શોધીએ. વર્તુળ ઉપરનાં છ એ છ બિંદુઓને કેન્દ્ર સાથે જોડતાં છ સરખાં ત્રિકોણો મળશે. આથી ગમે તે એક ત્રિકોણની બધી બાજુઓ શોધીએ. ΔABC માં $CA = CB = r$ છે. 360° ને છ સરખા ભાગમાં વહેંચતા હોઈને $\angle ACB = 60^o$ છે. આથી $\angle ABC$ માં $\angle ACB = \angle ABC = \angle CAB = 60^o$ છે. આથી ΔABC સમભૂજ છે. આથી $AB = BC = CA = r$ છે. આથી ષટ્કોણની છએ બાજુઓનો સરવાળો $6r$ છે. આથી ત્રિકોણનો પરિઘ, જો આપણે $2\pi r$ લઈએ તો, $2\pi r > 6r$ છે.

આથી, $\pi > 3$ છે.

આ રીતે π ની કિંમત પણ મેળવી શકાય.

જાણે કે આપ AB અને સુરેખ ABની લંબાઈમાં ઘણો ફરક છે. આ ફેર નાનો કરવા માટે દરેક ચાપનાં મધ્યબિંદુઓ લઈએ. આગળનાં છ બિંદુઓમાં છ મધ્યબિંદુઓ ઉમેરતાં આપણને આકૃતિ 1(a)માં બતાવ્યા પ્રમાણે 12 બિંદુઓ મળશે. આ બિંદુઓને કેન્દ્ર સાથે જોડતાં 12 ત્રિકોણો મળશે. આપણને ΔABC ના બદલે આકૃતિ 1(b)માં બતાવ્યા પ્રમાણે બે ત્રિકોણો ΔACD અને ΔDCB મળશે. એ જ પ્રમાણે બાકીના દશ ત્રિકોણો મળશે. આ 12 ત્રિકોણો સરખા હોઈને આપણે ΔBCD ની બાજુ BD મેળવીએ. ΔBCD માં $\angle DCB = \frac{1}{2}\angle ACB = 30^o$ છે. આથી $\angle CDB = \angle DBC = 75^o$ થાય.

સાઇનના નિયમ પ્રમાણે $= \frac{CD}{\sin 75^o} = \frac{BD}{\sin 30^o}$ છે.

આથી, BD = CD $\frac{sin\, 30^{o}}{sin\, 75^{o}}$ = 0.517638 r છે.

આથી, 12 gon ની પરિમિતિ = 12 × 0.517638 = 6.211662 r

$\therefore$ $2\pi r$ > 6.211662 r

$\therefore$ π > 3.1058 છે.

આ જ રીતે વર્તુળ ઉપરનાં બિંદુઓ બમણાં કરતા જઈએ એટલે કે 24, 48, 96 લઈને ^ની કિંમત ચોક્કસ કરતા જઈએ અથવા તો વર્તુળનો પરિઘ મેળવતા જઈએ.

પરવલય $y = x^2$ એ x-અક્ષ વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ

આપણે $y = x^2$ અને x-અક્ષ $x = 0$ થી $x = 1$ વચ્ચેનું આકૃતિ 2માં બતાવ્યા પ્રમાણેનું ક્ષેત્રફળ. આ ક્ષેત્રફળ કઈ રીતે મળે ? ત્રિકોણ, ચોરસ અને ચોરસ આકૃતિઓનાં ક્ષેત્રફળો કઈ રીતે મેળવવાં તે જાણીએ છીએ. આકૃતિ 2માં બતાવ્યા પ્રમાણે આ ક્ષેત્રફળને નાના લંબચોરસમાં વહેંચો. આ લંબચોરસો ઘણી રીતે પસંદ કરી શકાય, પણ આકૃતિ 2(a)માં બતાવ્યા પ્રમાણેના આંતરાલના જમણી બાજુના છેડાની કિંમત લઈને લંબચોરસ દોરીએ. $0, \frac{1}{4}$, , , આંતરાલો છે. જમણી બાજુના છેડાની કિંમત , , અને 1 છે. આથી આકૃતિ 2(a)માં બતાવેલા લંબચોરસોની ઊંચાઈઓ , , અને $(1)^2$ હોઈને

લંબચોરસના ક્ષેત્રફળોના સરવાળા =

$$= \frac{1}{64} \quad \frac{4}{16} \quad \frac{9}{64}$$ [illegible]

$$= \qquad = \frac{30}{64}$$

આ બધા લંબચોરસોની અંદર વક્ર $y = x^2$ હોઈને વક્રની નીચેનું ક્ષેત્રફળ A < = 0.46875 છે.

અંતરાલોના ડાબી બાજુના છેડાની કિંમતો 0, , , લઈને આકૃતિ 2(b)માં બતાવ્યા પ્રમાણે લંબચોરસો દોરીએ. આ દરેક લંબચોરસની પહોળાઈ છે અને ઊંચાઈઓ અનુક્રમે $(0)^2$, , અને હોઈને તેમના ક્ષેત્રફળોના સરવાળા =

$$= \frac{1}{4} \; 0 \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{9}{16}$$

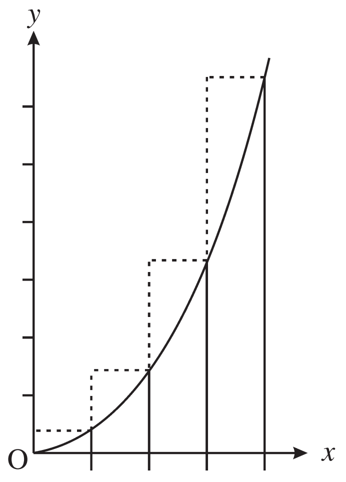
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{14}{16} \quad \frac{14}{64} \text{ છે.}$$

વક્ર આ બધા લંબચોરસની ઉપર હોઈને વક્રની નીચેનું ક્ષેત્રફળ A > $\frac{14}{64}$ = 0.21875

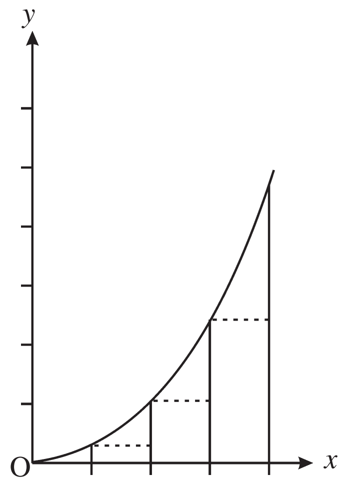
આથી 0.21875 < A < 0.46875 છે.

આંતરાલ [0, 1]ના ચાર ભાગ કરેલા. હવે દરેક આંતરાલનું મધ્યબિંદુ લઈ આઠ ભાગ કરીએ અને આ બંને પ્રકારના લંબચોરસો લઈને ક્ષેત્રફળો મેળવીએ. એ જ પ્રમાણે 16, 32, 64,... ભાગો પાડીને ક્ષેત્રફળો મેળવી શકીએ.

આ પ્રમાણે, જટિલ પ્રશ્નને નાના પ્રશ્નોમાં વહેંચીને ઉકેલ મેળવી શકીએ.



આકૃતિ 2(a)



આકૃતિ 2(b)

વિકલન

ઇટલીના જાણીતા નમતા પિસા ટાવર ઉપર ગણિતના પ્રોફેસર ચઢી રહ્યા હતા. આ નમતા પિસા ટાવરનું બાંધકામ ઑગસ્ટ 14, 1173માં શરૂ થયેલું. લડાઈ અને અન્ય કારણોસર 1372માં પૂરું થયું. લગભગ 55.86 મીટર અથવા 183 ફીટ ઊંચું છે. ટાવરને સાત માળ અને 296 પગથિયાં છે. આ ટાવરના છેલ્લા માળે પહોંચીને આ પ્રોફેસર ગુલાબ અને હીરાની વીંટી હથેળીમાં રાખે છે અને હાથ કઠેરાના બહાર હવામાં કાઢીને હથેળીને ફેરવીને બંનેને એકસાથે છોડે છે. આ નમતો ટાવર હોઈને આ કામ સરળ બને છે. પછી વિચારે છે :

થોડીક સેકન્ડો પછી આ બંને કેટલે હશે? કોઈને ખબર હશે? આ અખતરા પહેલાં ઘણા સમય પહેલાંનાં સંત જેવા ગણાતા તત્ત્વજ્ઞાની એરિસ્ટોટલ, એમ માનતા કે સરખી ઊંચાઈ ઉપરથી બે જુદા જુદા દ્રવ્યવાળા પદાર્થોને એક સાથે નીચે મૂકવામાં આવે તો વધારે દ્રવ્યવાળો પદાર્થ ધરતીને પહેલો અડશે.

આ ગણિતના પ્રોફેસર ગેલિલિયો હતા. તેમણે જે શોધ્યું તે અજબનું હતું. બંને ગુલાબ અને હીરાની વીંટી એક જ સાથે ધરતી ઉપર પડ્યાં. આ તદ્દન અણધાર્યું પરિણામ હતું અને સાથે સાથે અંતર માટેનું સૂત્ર $D(t) = 55.86 - ct^2$ શોધ્યું, જ્યાં c અચળ સંખ્યા છે જેની કિંમત આપણે સગવડતા માટે 16 લઈશું અને t સમય છે.

આકૃતિ 1 માં પદાર્થ જુદા જુદા સમયે ક્યાં હશે, તે બતાવ્યું છે.

$D(0) = 55.86$

$D(t) = 55.86 - 16(1)^2$

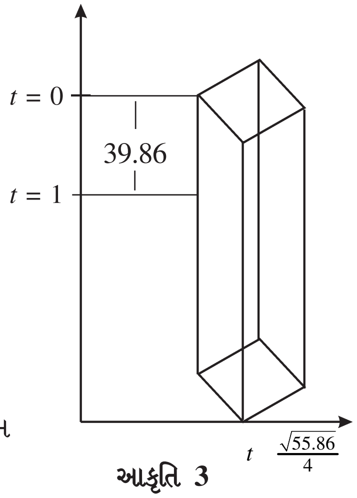
$= 39.86$

$D(t) = 0$

$\therefore \quad 16t^2 = 55.86$

$\therefore \quad t = \frac{\sqrt{55.86}}{4} \cong 1.87$ સેકન્ડ

આ ગેલિલીઓનો નિયમએ ભૌતિકશાસ્ત્રની સિદ્ધિ છે. ગેલેલીયોનો નિયમ અંતર અને સમયને જોડે છે.



આકૃતિ 3

આપણે ઘણી વખત ઓછા સમયમાં વધારે અંતર કાપીએ છીએ અને વધારે સમયમાં ઓછું અંતર કાપીએ છીએ. આને બીજી રીતે જોઈએ તો બંનેની ઝડપ સરખાવીએ છીએ. આથી સરેરાશ ઝડપ = $\frac{\text{અંતર}}{\text{સમય}}$.

અહીંયાં અંતર કાપવામાં લીધેલો સમય તે સમય છે. અહીંયાં ટાવર ઉપરથી ગુલાબ કે હીરાની વીંટીની સરેરાશ ઝડપ કેટલી?

$$\text{સરેરાશ ઝડપ} = \frac{\text{કુલ અંતર}}{\text{નીચે જમીનને અડે ત્યાં સુધીનો સમય}}.$$

$$= \frac{55.86}{\sqrt{55.86/4}} = 4 \qquad = 29.89 \text{ K/S}$$

હવે જ્યારે હું કહું છું કે, ‘‘કલાકના 100 કિ.મી.ની ઝડપે ગાડી ચલાવું છું.’’ ત્યારે હું શું કહું છું ? અડધા કલાક પછી ગાડી ચલાવવાનું બંધ કરું તો શું ? અડધો કલાક 150 કિ.મી./ કલાક ચલાવતો હોઉં અને શરૂઆતના અડધા કલાક દરમિયાન પોલીસ મળે અને રોડ ઉપર બૉર્ડ હોય જેમાં લખ્યું હોય કે 100 કિ.મી.ની ઝડપ તો શું? હું તેને સમજાવવા મથું કે મારી સરેરાશ ઝડપ 100 કિ.મી./કલાક થશે તો તે માનશે કે મને દંડ કરશે ? આ બધી મુશ્કેલીઓનું કારણ આપણને સરેરાશ ઝડપ કરતાં વિશેષ જોઈએ છે. આપણે તાત્ક્ષણિક વેગ (Instantaneous Velocity) અથવા તાત્ક્ષણિક ઝડપ જોઈએ.

તાત્ક્ષણિક વેગ દરેકે દરેક ક્ષણે વગે દર્શાવે છે, જ્યારે સરેરાશ ઝડપ આખી મુસાફરી દરમિયાન કાપેલું કુલ અંતર અને આખી મુસાફરી દરમિયાન લીધેલા સમયનો ગુણોત્તર છે. દરેકે દરેક ક્ષણે ઝડપ કઈ રીતે મેળવાય ? કોઈપણ સમય t માટે આપણે અંતર $D(t)$ મેળવી શકીએ. હવે tની નજીકમાં નાનામાં નાનો h લઈએ, અને અંતર $D(t + h)$ મેળવીએ. હવે આપણે $t + h$ અને t વચ્ચે કાપેલું અંતર = $D(t + h) - D(t)$ છે. આને લીધેલો કુલ સમય $(t + h) - t = h$ છે. હવે ગુણોત્તર લઈને, $\frac{D(t \quad h) \quad D(t)}{h}$

t ક્ષણે ઝડપ = જ્યાં h એકદમ નાની સંખ્યા છે.

દરેક ક્ષણે આપણને ઝડપ મળતું હોઈને આ પણ વિધેય બને છે. હવે આપણે નીચે પડતા ગુલાબ અને હીરાની વીંટીની તાત્ક્ષણિક ઝડપ મેળવીએ. સામાન્ય રીતે આ નવા વિધેયને $D'(t)$ દર્શાવાય છે. એટલે કે

$$D'(t) = \frac{D(t \quad h) \quad D(t)}{h} = \frac{55.86 \quad {}^{16}(t \quad h)^2 \quad 55.86 \quad {}^{16}t^2}{h}$$

$$= \frac{16}{h}\{-(t + h)^2 + t^2\}$$

$$= -16\ (2t + h) = -32t - h \text{ થાય.}$$

h અત્યંત – હોઈને, આપણે $D'(t) = -\ 32t$ મેળવીએ છીએ. જાણે કે $t = 1$ સમયે ઝડપ $D'(t) = -\ 32$ m/s છે. ઋણ સંજ્ઞા ઊલટી દિશા બતાવે છે.

વક્રો

વક્રના સ્પર્શકોએ કલનગણિતના વિકાસમાં ખૂબ જ અગત્યનો ભાગ ભજવ્યો છે. સ્પર્શક શબ્દ જ શું છે તે કહે છે. વક્રને સ્પર્શક સ્પર્શે છે. વર્તુળના સ્પર્શકોથી આપણે પરિચિત છીએ. સ્પર્શક સુરેખા હોઈને આપણે સ્પર્શકનો ઢાળ મેળવવો જોઈએ. ઉદાહરણ માટે આપણે પરવલય $F(x) = X^2$ લઈએ. આપણે પરવલય ઉપરના બિંદુ (1,1) એ દોરેલા સ્પર્શકનો ઢાળ મેળવવો છે. પરવલય ઉપર બીજું જુદું બિંદુ (2,4) લઈએ અને બંને બિંદુઓમાંથી પસાર થતી સુરેખાનો ઢાળ

$$m = \qquad = \frac{f(2) \quad f(1)}{2 \quad 1}$$

$$= \frac{2^2 \quad 1^2}{2 \quad 1} = 2 + 1 = 3 \text{ છે.}$$

આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે બિંદુ (2,4) ના બદલે બિંદુ (1.5, $\frac{3}{2}$) (1,1)ની નજીક લઈએ, આ છેદક રેખાનો ઢાળ

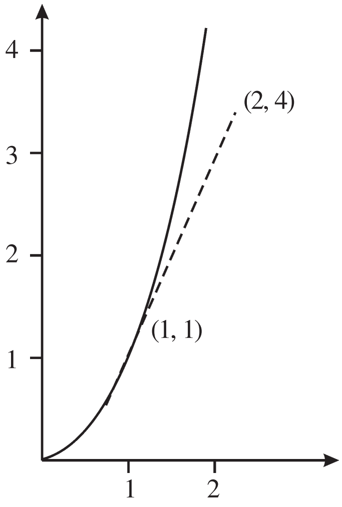
$$m = \qquad = \frac{\frac{3}{2}^2 \quad 1^2}{\frac{3}{2} \quad 1}$$

$$= \frac{3}{2} + 1 = \qquad = 2.5 \text{ છે.}$$

આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે બિંદુ $(1.1, (1.1)^2)$, (1, 1) નજીક લઈએ. આ છેદક રેખાનો ઢાળ

$$m = \qquad = \frac{(1.1)^2 \quad 1^2}{(1.1) \quad 1} = 1.1 + 1 = 2.1$$

છે. એ જ રીતે આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે બિંદુ $(1.01, (1.01)^2)$ બિંદુ (1.1)ની નજીક લઈએ.



આકૃતિ 4

આ છેદક રેખાનો ઢાળ $m = \qquad = 1.01 + 1 = 2.01$ છે.

ટૂંકમાં આપણે બિંદુ (1,1)ની એકદમ નજીકમાં બિંદુ $(1 + h, (1 + h)^2)$ લઈએ.

આ છેદક રેખાનો ઢાળ $m = \qquad = (1 + h) + 1 = 2 + h$ છે. છે. અને $h \to 0$ છે.

આથી સ્પર્શકનો ઢાળ 2 છે. જો $h \to 0$ હોય, તો $m \to 2$ છે. આમ, કહેવા માટે ઘણું બધું કહેવું પડે. જો તમારે આ બરાબર સમજવું હોય તો કલનગણિતનો અભ્યાસ કરવો પડે. કોઈ બિંદુએ $(x, f(x))$

સ્પર્શકનો ઢાળ $m = \frac{f(x \quad h) \quad f(x)}{(x \quad h) \quad x} = \frac{f(x \quad h) \quad f(x)}{x}$ જ્યાં $h \to 0$ છે.

આની સાથે

તાત્ક્ષણિક ઝડપ $D'(t) = \frac{D(t \quad h) \quad D(t)}{h}$ જ્યાં $h \to 0$ છે.

સરખાવતાં બંને વ્યાખ્યાઓમાં ઘણી જ સમાનતા છે. આથી ઢાળ કે ઝડપ જોડે જોડ્યા વગર જ આપેલા વિધેય f માંથી તદ્દન જુદું જ વિધેય જેને આપણે f માંથી જ મેળવેલું હોઈને f' વડે દર્શાવીશું અને

$$f'(x) = \frac{f(x \quad h) \quad f(x)}{x} \text{ જ્યાં } h \to 0 \text{ છે.}$$

આ બદલાવવાનો દર છે. f' ને f નો x વિશે વિકલિત (Derivative) કહેવાય છે.

વિધેયનો વિકલિત મેળવવાની ક્રિયાને વિકલન કહેવામાં આવે છે.

સમાન વિધેયોના વિકલિતો જોઈએ.

(1) $f(x) = a.$ a અચળ છે, $f'(x) = \frac{f(x \quad h) \quad f(x)}{x} = \frac{a \quad a}{h} = \quad = 0$

આકૃત્તિ 3માં $f(x) = a$ નો આલેખ આપ્યો છે. આ સુરેખા ઉપર કોઈપણ બિંદુએ સ્પર્શક દોરીએ તો તે સ્પર્શક x-અક્ષને સમાંતર છે અને આપણે જાણીએ છીએ કે x-અક્ષના ઢાળ $m = 0$ છે. સુરેખાઓના સ્પર્શકો તે જ સુરેખાઓ છે.

(2) $f(x) = x^2$

$f'(x) = \quad = \frac{x^2 \quad 2hx \quad h^2 \quad x^2}{h}$

$= 2x + h$ થાય, જો $h \to 0$ હોય તો

$= 2x$

આ લેખ નીચેનાં પુસ્તકોના આધારે લખ્યો છે.

(1) Wouk, Herman. The Language God Talks : On Science and Religion. Bosten : Little, Brown, 2010

(2) Strogatz, Steven. Infinite Powers : How Calculus Reveals the Secrets of the Universe. An Eamon Dolan BooK, Houghton Miffin Harcourt. Bosten, New York, 2019

વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ

'સ્વરાજ', નરસિંહજી મંદિર પાસે, ઉવારસદ રોડ, મુ. પો. શેરથા,

તા. જિ. ગાંધીનગર મો. ૯૪૨૮૦૧૯૦૪૨

ગ્રંથસૌરભ

મણિભાઈ પ્રજાપતિ

જૈન વિશ્વકોશ, ખંડ-૫ : 'દે'થી 'નૌ' / સંપાદકો : કુમારપાળ દેસાઈ અને ગુણવંત બરવાળિયા. મુંબઈ : શ્રી ઉવસગ્ગહર સાધના ટ્રસ્ટ; વિક્રેતા : અમદાવાદ : ગૂર્જર, ૨૦૧૯. xvii, ૩૭૮ પૃ. ISBN : ૯૭૮-૮૧-૯૩૧૫૬-૦-૮. કિં. રૂ. ૧૫૦૦.

યુગદિવાકર રાષ્ટ્રસંત પૂ. ગુરુદેવ શ્રી નમ્રમુનિ મહારાજસાહેબના પ્રેરણા અને પ્રોત્સાહન, કર્મઠ, ક્રિયાશીલ અને પ્રતિબદ્ધ સંપાદકો સર્વશ્રી પદ્મશ્રી કુમારપાળ દેસાઈ અને ગુણવંત બરવાળિયા તથા શ્રી ઉવસગ્ગહર સાધના ટ્રસ્ટના ધ્યેયનિષ્ઠ કર્ણધારોના ત્રિવેણીસંગમથી બહુખંડિય 'જૈનવિશ્વકોશ'ના સંપાદન / પ્રકાશનનો પ્રકલ્પ હાથ ધરવામાં આવતાં તેનો પ્રથમ ખંડ વિ. સં. ૨૦૭૨ના પર્વાધિરાજ પર્યુષણના સમયે પ્રકાશિત કરવામાં આવ્યો હતો. આ દૃષ્ટિપૂત 'વિશ્વકોશ'ના ક્રમશઃ પાંચમા ખંડનું પ્રકાશન તાજેતરના દિવસોમાં કરવામાં આવ્યું, જેમાં ગુજરાતી વર્ણાનુક્રમમાં 'દે'થી 'નૌ' સુધીના કુલ ૩૨૭ અધિકરણો – પરિશિષ્ટનાં ૪૯ અધિકરણો સહિત – સમાવિષ્ટ છે. આ બધા અધિકરણોના કર્તૃત્વની દૃષ્ટિએ વિચાર કરીએ તો ૧૬૧ (૪૮.૯૫ ટકા) અધિકરણો વિદુષી સાધ્વીશ્રીજીઓ અને મહિલાઓ કૃત છે, જ્યારે વ્યક્તિકર્તાની દૃષ્ટિએ જોઈએ તો સૌથી અધિક ૫૦ અધિકરણો ડૉ. સાધ્વી આરતીજી અને ત્યાર બાદ ૩૫ અધિકરણો કુમારપાળ દેસાઈ કૃત છે. આ બધા અધિકરણો પૈકી સૌથી વધુ અધિકરણો વ્યક્તિચરિત્રો (પૌરાણિક જૈનસાહિત્યમાં આલેખિત ઉદાહરણસ્વરૂપ પાત્રો સહિત) ૧૨૮ છે, જેમાં ૧૦ ચરિત્રો જૈન સાહિત્યના પાશ્ચાત્ય અભ્યાસીઓ તેમ જ ૩૦ ચરિત્રો સાધ્વીશ્રીજીઓ તથા વિદુષી અને કર્મશીલ મહિલાઓ