વાસ્તવિક સંખ્યાઓ (Real Number)

વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ

પ્રસ્તાવના

સૌથી પહેલી શોધ પૂર્ણાંકોની (Integers) થઈ. સામાન્ય રીતે બધા જ પૂર્ણાંકોના ગણને I = {1, 2, 3,....., *n*,...} વડે દર્શાવવામાં આવે છે. આ ગણમાં કેટલા પૂર્ણાંકો? અનંત (Infinity). અનંત એટલે કેટલા? એક કોથળામાં એક, બે, ત્રણ વિ. ચબરકી ઉપર લખીને નાખે રાખીએ. આ લખીને નાખવાનું ચાલુ રાખીએ, તો કોઈ દિવસ બંધ ન થાય. એવામાં ગણિતશાસ્ત્રી કેન્ટર (Cantor) આવ્યા. તેમણે થોડાંક નજીવો ફેરફાર સુચવ્યો. ધારો કે કોથળો ભરાઈ ગયો અને આપણે લખીને નાખવાનું બંધ કર્યું અને કોથળામાં ભરેલા પૂર્ણાંકોને અનંત સંપૂર્ણ પૂર્ણાંકો કહીએ. આની અસર શી?

બે ગણોને બે રીતે સરખાવી શકાય. બંનેના સભ્યો ગણીને જો બંનેમાં સરખા સભ્યો હોય તો કહી શકીએ કે બંને ગણો સરખા છે. એ વિશાળ સભાગૃહમાં આવેલા બધા પ્રેક્ષકોને બેઠક મળશે? સભાગૃહની બેઠકોની સંખ્યા અને પ્રેક્ષકોની સંખ્યા ગણવી થોડીક મુશ્કેલ છે. આને બદલે પ્રેક્ષકોને બેસી જવા વિનંતી કરવી સરળ છે. જો દરેક પ્રેક્ષકને બેઠક મળે, બેઠકને પ્રેક્ષક મળે તો આપણે કહીએ કે સભાગૃહના બેઠકોનો ગણ અને પ્રેક્ષકોનો ગણ સરખા છે. અહીંયાં આપણે પ્રેક્ષક-બેઠક, બેઠક-પ્રેક્ષકને અનુરૂપ (one to one correspondence) ગોઠવીને સરખામણી
$\frac{1 \quad (\ 1)^n(2n}{4}$ કરી. આ રીત બંને ગણોના સભ્યોને એકબીજાને અનુરૂપ ગોઠવીને સરખાવવા તે પણ અગત્યની રીત છે.

જો એક ગણના દરેક સભ્યને બીજા ગણના ફક્ત એકને એક જ સભ્યને અનુરૂપ ગોઠવી શકાય તે જ રીતે બીજા ગણના દરેક સભ્યને પહેલા ગણના ફક્ત એક ને એક જ સભ્યને અનુરૂપ ગોઠવી શકાય તો બંને ગણો સમાન ગણો (Equivalent) ગણાય. અંગ્રેજીમાં એવું કહેવાય કે આ બંને ગણોની કાર્ડિનાલિટી (Cardinality) સરખી છે.

કેન્ટરે જે સુચવેલું તે હવે જોઈએ, અને તેની અસર જોઈએ. અનંત સંપૂર્ણ પૂર્ણાંકોનો ગણ I = {1, 2, 3,....} અને અનંત સંપૂર્ણ બેકીનો ગણ E = {2, 4, 6,....} લઈને આપણને આ બે ગણોના સભ્યોને એકબીજાને અનુરૂપ નીચે પ્રમાણે ગોઠવી શકીએ.

N	1	2	3	4	5......	*n*......
	↕	↕	↕	↕	↕	↕
E	2	4	6	8	10......	2*n*......

Nના દરેક સભ્યને Eની એક જ સંખ્યા જોડે જોડી શકાય અને તે જ રીતે Eના દરેક સભ્યને Nની એક સંખ્યા જોડી શકાય. આથી I અને Eના સમાન ગણો છે. આથી તેમની કાર્ડિનાલિટી સરખી છે. એટલે કે પૂર્ણાંકો કરતાં બેકી સંખ્યા ઓછી નથી. આ પચાવી શકશો ?

ઋણ અને ધન પૂર્ણાંકો અને શૂન્યનો ગણ $\mathbb{Z}$ = {....−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3...} છે. N અને $\mathbb{Z}$ના સભ્યોને નીચેની અનુપમ રીતે જોડી શકાય.

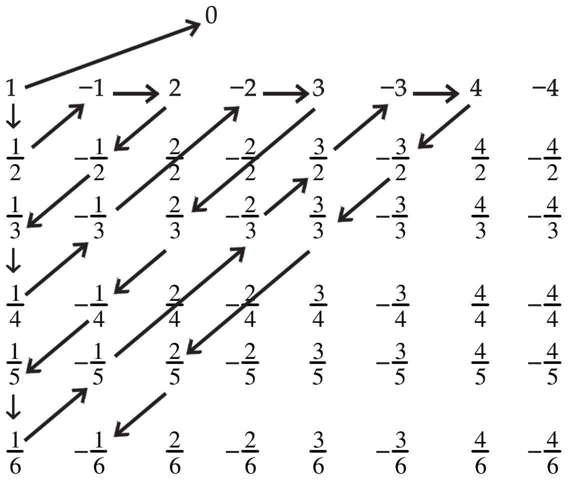
N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*n*
	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
$\mathbb{Z}$	0	1	−1	2	−2	3	−3	4	−4	

Nના n સભ્ય માટે Zનો $\frac{1 \quad (\quad 1)^{n}(2n \quad 1)}{4}$ સભ્ય છે.

આથી N અને Z સમાન ગણો છે. આ પચાવી શકાશે? Z અને Nમાં સરખા સભ્યો છે. (!!) કઈ રીતે? કોથળો ભરાય એટલે ભરવાનું બંધ કરીએ છીએ. અનંત સંપૂર્ણ છે, અનંત અનંત નથી. આના પછી કેન્ટરે બહુ જ હિંમતભરી રીતે નવી વ્યાખ્યા આપી. જો કોઈપણ ગણના સભ્યોને N ગણના સભ્યોને અનુરૂપ ગોઠવી શકાય તો તે ગણ ડીનુમરેબલ અથવા કાઉન્ટેબલી ઇન્ફાઇનાઇટ (denumerable or countably infinite - ગણ્ય અનંત) છે. આ ગણ્ય અનંત ગણના સભ્યોને સંખ્યા માટે હીબ્રુ ભાષાનો પહેલો શબ્દ ઍલેફ નૉટ (Aleph Naught) K_0 કેન્ટરે પસંદ કર્યો. $\overline{M}$ એટલે M ગણની કાર્ડિનાલિટી. આથી $\overline{N} = \overline{E} = \overline{Z} = K_0$.

અપૂર્ણાંક સંખ્યાઓ (સંમેય સંખ્યાઓ, Rational Numbers)

અપૂર્ણાંક સંખ્યાઓના ગણે $Q = \{ \frac{a}{b} \mid a$ અને b પૂર્ણાંક છે અને $b \neq 0\}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે. Qના સભ્યોને Nના સભ્યો જોડે જોડવામાં નીચેની રીત મદદરૂપ થશે.



આના ઉપરથી

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15....
	↕	↕			↕	↕	↕			↕	↕	↕	↕	↕	↕
Q	0	1		−1	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	−2	3	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$

જોઈ શકાશે કે એક પ્રાકૃતિક સંખ્યા સાથે એક સંમેય સંખ્યા અનુરૂપ રીતે જોડી શકાય છે. તે જ રીતે એક સંમેય સંખ્યા જોડે એક પ્રાકૃતિક સંખ્યા અનુરૂપ રીતે જોડી શકાય છે.

આથી $\overline{Q} = \overline{N} = K_0$.

અત્યારસુધી દરેક અનંત સંપૂર્ણ ગણ ગણ્યઅનંત ગણ છે, પણ 1874માં કેન્ટરે ગણ શોધી કાઢ્યા કે જે અગણ્ય અનંત ગણ છે. 1891માં તેની સરળ સાબિતિ આપી જે ખરેખર સરળ હોઈને આપણે જોઈએ.

નોંધ : આપણે $\frac{1}{2} = 0.5000... = 0.49999...$ દર્શાવી શકીએ. પણ સંખ્યા દર્શાવવાની અનન્યતા માટે અંતમાં શૂન્યો આવે તે રીતે સંખ્યાને દર્શાવીશું.

પ્રમેય : અંતરાલ (0, 1)માં આવેલી બધી વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ત્રણ અગણ્ય અનંત છે.

સાબિતી : ધારો કે અંતરાલ (0, 1)માં આવેલી બધી વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ ગણ્ય અનંત છે. આ ધારણાના કારણે આ ગણના દરેક સભ્યને N ગણના ફક્ત એકના એક જ સભ્યને અનુરૂપ ગોઠવી શકાય. એક જ રીતે નીચે જણાવ્યા પ્રમાણે N ગણના પ્રત્યેક સભ્યને (0, 1)ની વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણના ફક્ત એકના એક જ સભ્યને અનુરૂપ ગોઠવી શકાય.

N	(0, 1)માંની વાસ્તવિક સંખ્યાઓ
1	$x_1 = 0.21357....$
2	$x_2 = 0.35678....$
3	$x_3 = 0.44356....$
4	$x_4 = 0.78653....$
5	$x_5 = 0.95678....$
$\vdots$	
n	$x_n = 0.a_1a_2....a_n$

હવે આપણે (0, 1)માંની નીચેની વાસ્તવિક સંખ્યા લઈએ. x_1નો પહેલો દશાંશ 2 હોઈને 2, 0 અને 9 વગરની કોઈપણ સંખ્યા લઈએ. આપણી નવી વાસ્તવિક સંખ્યા bનો પહેલો દશાંશ 3 લઈએ એટલે $b = 0.3$ છે. x_2 માં દશાંશની બીજી જગ્યાએ 5 છે. bનો બીજી જગ્યાનો દશાંશ 5, 0 અને 9 વગરની કોઈપણ સંખ્યા લઈએ. 6 લઈએ એટલે $b = 0.36...$ છે. હવે x_3 માં દશાંશમાં ત્રીજી જગ્યાએ 3 હોઈને, 3, 0, 9 વગરની 4 સંખ્યા લઈએ એટલે $b = 0.364$ છે. એ જ રીતે x_4 માં ચોથો દશાંશ 5 હોઈને, 5, 0, 9 વગરની 6 લઈએ એટલે $b = 0.3646...$ છે. હવે x_5 માં પાંચમી જગ્યાએ 8 હોઈને, 8, 0, 9 વગરની સંખ્યા 7 લઈએ, એટલે $b = 0.36467...$ છે. આ જ પ્રમાણે આગળ વધતાં જતાં b મળશે, જે આપણા ટેબલમાં કોઈપણ જગ્યાએ નથી અને આ b (0, 1)માં આવેલી વાસ્તવિક સંખ્યા છે. જેના માટે N ગણમાં કોઈ પૂર્ણાંક નથી. આથી આપણી ધારણા (0, 1)માં આવેલી બધી વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ ગણ્ય અનંત છે તે ખોટી હોઈને (0, 1)માં આવેલી બધી વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ અગણ્ય અનંત છે.

આપણે અંતરાલ (0, 1)માં આવેલી વાસ્તવિક સંખ્યાઓ જોઈએ :

સંમેય સંખ્યાઓ : $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{17}, \frac{1}{179},...$

આપણે જોયું કે આ સંમેય સંખ્યાઓનો ગણ ગણ્ય અનંત ગણ છે.

અસંમેય સંખ્યાઓ : $\sqrt{0.2}, \sqrt{0.3}, \sqrt{0.7}, \frac{\ }{8}, \frac{e}{7},...$

આપણે આ અસંમેય સંખ્યાઓનો ગણ ગણ્ય અનંત છે કે નહિ તે જાણવા માટે નીચેનું પ્રમેય ઉપયોગી છે.

પ્રમેય : જો B અને C ગણો ગણ્ય અનંત ગણો હોય, અને
$A = B \cup C$ હોય, તો A પણ ગણ્ય અનંત ગણ છે.

સાબિતિ : B અને C ગણ્ય અનંત ગણો હોઈને

N	1	2	3......		N	1	2	3......
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	અને		$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
B	b_1	b_2	b_3......		C	c_1	c_2	c_3......

$A = B \cup C = \{b_1, c_1, b_2, c_2, ...\}$

N	1	2	3	4	5.....
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		
A	b_1	c_1	b_2	c_2	b_3.....

આથી $A = B \cup C$ પણ ગણ્ય અનંત ગણ છે.

અસંમેય સંખ્યાઓ (Irrational Numbers)

આપણે અંતરાલ (0, 1)ના સંમેય સંખ્યાઓના ગણ Q ગણ્ય અનંત ગણ સાબિત કર્યો. અંતરાલ (0, 1)ની વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણ R અગણ્ય અનંત ગણ સાબિત કર્યો. ધારોકે અંતરાલ (0, 1)ના અસંમેય સંખ્યાઓનો ગણ I_r ગણ્ય અનંત ગણ છે. $Q \cup I_r = R$ હોઈને Q અને I_r ગણ્ય અનંત ગણો હોઈને, પ્રમેય પ્રમાણે R પણ ગણ્ય અનંત હોવો જોઈએ. આપણે સાબિત કર્યું કે R અગણ્ય અનંત ગણ છે. આથી I_r ગણ્ય અનંત ગણ છે. તે આપણી ધારણા ખોટી છે. આથી ગણ I_r અગણ્ય અનંત ગણ છે. આનો અર્થ શો?

અસંમેય સંખ્યાઓ સંમય સંખ્યાઓ કરતાં ઘણી વધારે છે એટલે કોઈક વખત ગણિતશાસ્ત્રીઓ એમ કહેશે કે મોટાભાગની વાસ્તવિક સંખ્યાઓ અસંમેય સંખ્યાઓ છે. જરૂરથી સંમેય સંખ્યાઓનો ગણ ગણ્ય અનંત ગણ છે. છતાંયે અસંમેય સંખ્યાઓની સરખામણીમાં પાણીની ડોલમાં પાણીના બિંદુ બનાવાય છે. આમ તો આપણને સંમેય સંખ્યાઓ ઘણી દેખાય છે.

આ લેખ નીચેના પુસ્તકના આધારે લખ્યો છે.

(1) Williom Dunhem, Journay through Genius : The Great Theorems of Mathematics, John Wiley & Sons, In, 1990

વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ

નરસિંહજી મંદિર પાસે, ઉવારસદ રોડ, મુ.પો. શેરથા, જિ. ગાંધીનગર

મો. 9428019042

●

પૃષ્ઠ ૨૫નું અનુસંધાન

કરવા પહેલ કરે છે. અહીં ઉપરી અધિકારી (વ. ગો.)ની સ્વતંત્ર પ્રજ્ઞા વફાદારીની અભિવ્યક્તિનો દોર હાથ ધરે છે. વફાદારી ઉપરથી નીચે ગમન કરે છે. અધિકારીએ સોંપેલું કામ કરવામાં આવે તો તે એકાદ-બે દિવસ યાદ રાખે છે. પણ અહીં નિયામકે (વ. ગો.) કરેલ કામ લાંબા સમય સુધી તાજું રહે છે. સમગ્ર ઘટના વફાદારીનો x-રે આપે છે.

વસંત ગોવારીકર સેટેલાઇટ લોચીંગ વહિકલના (SLU)ના નિર્માતા, પોલિમર વિજ્ઞાનના પુરસ્કર્તા ને સર્જક, ૨૮ ફેબ્રુઆરીને રાષ્ટ્રીય વિજ્ઞાન દિન તરીકે જાહેર કરનારા, પેસ્ટિસાઇડ્સ અને ફર્ટિલાઇઝરનો એનસાઇક્લોપીડિયા તૈયાર કરનારા હતા. તેઓ બહુપારિમાણિક વ્યક્તિત્વ ધરાવતા ભારતીય ચોમાસાના વૈજ્ઞાનિક પરિરૂપ વિકસાવનાર અને આગાહી કરનારા હતા. ઈસરોને એક ટનના ક્રાયોજેનિક એન્જિનની શરૂઆત કરી શકે તેનું દિશાદર્શન કરાવનારા હતા. તેઓ ગણતરીપૂર્વકનું જોખમ ખેડનાર વિજ્ઞાની હતા. તેઓ તેમને અનુસરનારને સર્વગ્રાહી સ્વતંત્રતા આપતા હતા અને પ્રેરણા પણ. અવકાશ સંશોધનકર્તા વિજ્ઞાનીઓ અને સામાન્ય માણસના હૃદયમાં તેમનું અપૂર્વ સ્થાન છે.

પૂર્વાધ્યક્ષ - ભૌતિકવિજ્ઞાન વિભાગ

એમ. જી. સાયન્સ, ઇન્સ્ટિટ્યૂટ, અમદાવાદ-૯