બૈજિક અને બીજાતીત સંખ્યાઓ
(Algebraic and Transcendental Numbers)

વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ

પ્રાસ્તાવિક

આપણે વાસ્તવિક સંખ્યાઓના બે ગણ સંમેય સંખ્યાઓ અને અસંમેય સંખ્યાઓના જોયા. સંમેય સંખ્યાઓનો ગણ ગણ્ય અનંત છે જ્યારે અસંમેય સંખ્યાઓનો ગણ અગણ્ય અનંત છે. આ જ રીતે વાસ્તવિક સંખ્યાઓને બીજી રીતે પણ જોઈ શકાય. આપણે પૂર્ણાંક સહગુણકવાળુ બહુપદી સમીકરણ લઈએ જેવું કે $x^2 - 2 = 0$. આના ઉકેલો $\sqrt{2}$ અને $-\sqrt{2}$ છે. આ સંખ્યાઓ અસંમેય સંખ્યાઓ છે, સાથે સાથે $x^2 - 2 = 0$ સમીકરણના ઉકેલો પણ છે. આવા બહુપદી સમીકરણના ઉકેલોને બૈજિક સંખ્યાઓ (Algebraic Numbers) કહેવામાં આવે છે. આથી $\sqrt{2}$ અને $-\sqrt{2}$ બૈજિક સંખ્યાઓ પણ છે. બધી જ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ જેવી કે π કે e, પૂર્ણાંક સહગુણકવાળા બહુપદી સમીકરણોના ઉકેલો નથી, આવી વાસ્તવિક સંખ્યાઓને બિજાતીત (Transcendental) સંખ્યા તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. આપણે કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ લઈએ તો તે સંખ્યા જો પૂર્ણાંક સહગુણકવાળા બહુપદી સમીકરણનો ઉકેલ હોય, તો તે સંખ્યાને બૈજિક સંખ્યા તરીકે ઓળખીએ છીએ અને જો તે કોઈ પણ પૂર્ણાંક સહગુણકવાળા બહુપદી સમીકરણનો ઉકેલ ન હોય, તો તે સંખ્યાને બીજાતીત સંખ્યા કહીશું. આ રીતે વાસ્તવિક સંખ્યાઓના બે અગત્યના ભાગો પાડ્યા : બૈજિક અને બીજાતીત સંખ્યાઓ. આ સંખ્યાઓ સંમય કે અસંમેય સંખ્યા હોઈ શકે.

બૈજિક સંખ્યાઓ (Algebraic Numbers)

વાસ્તવિક સંખ્યા બૈજિક સંખ્યા (Algebraic Numbers) કહેવાય જો તે સંખ્યા પૂર્ણાંક સહગુણકવાળા બહુપદી સમીકરણનો ઉકેલ હોય. એટલે કે x_0 બૈજિક સંખ્યા કહેવાય. જો તે બહુપદી સમીકરણ $P(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + gx + h = 0$ નો ઉકેલ હોય. અહીંયાં $a, b, c, ..., h$ પૂર્ણાંક છે. અને $P(x_0) = 0$ છે. $\sqrt[3]{2}$ બૈજિક સંખ્યા છે કારણ તે $x^2 - 2 = 0$નો ઉકેલ છે. આ બૈજિક સંખ્યાઓ સિવાયની બીજી સંખ્યાઓ ખરી? જો સંખ્યા બૈજિક ન હોય, તો તે સંખ્યા બીજાતીત સંખ્યા તરીકે ઓળખાય છે.

જો $x_0 = \frac{b}{a}$ સંમેય સંખ્યા હોય તો x_0, એકઘાતી સમીકરણ $ax - b = 0$નો ઉકેલ છે. આથી બધી જ સંમેય સંખ્યાઓ બૈજિક સંખ્યાઓ છે.

$\sqrt{2}$ અસંમેય સંખ્યા છે અને બૈજિક સંખ્યા પણ છે કારણ કે $\sqrt{2}$, દ્વિઘાતી સમીકરણ $x^2 - 2 = 0$નો ઉકેલ પણ છે. આથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે અસંમેય સંખ્યાઓ પણ બૈજિક સંખ્યાઓ છે. બૈજિક સંખ્યાઓનો ગણ ગણ્ય અનંત કે અગણ્ય અનંત કે બેમાંથી એકે નહિ હોય. આનો જવાબ કેન્ટરે આપ્યો. તેમણે સાબિત કરી બતાવ્યું કે બૈજિક સંખ્યાઓને શ્રેણીમાં ગોઠવી શકાય. આ કામ પહેલી નજરે તો ખૂબ જ અઘરૂ લાગે, પણ યાદ રાખો કે કેન્ટર સામાન્ય ગણિતશાસ્ત્રી નથી. કેન્ટરે નવો વિચાર રજૂ કર્યો.

વ્યાખ્યા $P(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + gx + h$

n પદી છે. આ n પદીની ઊંચાઈ $= (n - 1) + |a| + |b| + |c| + ... + |g| + |h|$ લઈએ.

ધારો કે $P(x) = x^2 - x + 1$ છે. આ દ્વિપદીની ઊંચાઈ $= (2 - 1) + |1| + |-1| + |1| = 4$ હોઈને, આ દ્વિપદીની ઊંચાઈ 4 છે.

ઊંચાઈ 1 : $P(x) = x$. આની ઊંચાઈ $= (1 - 1) + |1| = 1$. $P(x) = x = 0$નો ઉકેલ $x = 0$ હોઈને પહેલી બૈજિક સંખ્યા 0 છે. $a_1 = 0$.

ઊંચાઈ 2 : $P_1(x) = x^2$, $P_2(x) = 2x$, $P_3(x) = x + 1$, $P_4(x) = x - 1$. દરેક ઊંચાઈ 2 છે. આના ઉકેલો $x = 0, -1, 1$ છે. $x = 0$. આગળ આવી ગયો, આથી $a_2 = -1$, $a_3 = 1$ છે.

ઊંચાઈ 3 : $P_1(x) = x^3$, $P_2(x) = 2x^2$, $P_3(x) = x^2 + 1$, $P_4(x) = x^2 - 1$, $P_5(x) = x^2 + x$, $P_6(x) = x^2 - x$, $P_7(x) = 3x$, $P_8(x) = 2x + 1$, $P_9(x) = x + 2$, $P_{10}(x) = x - 2$, $P_{11}(x) = 2x - 1$.

આપણે વાસ્તવિક સંખ્યાઓ શોધતા હોઈને, $P_3(x) = x^2 + 1 = 0$નો ઉકેલ કામ ન લાગે. $0, \pm 1, 0, -1, 0, 1, 0, -\frac{1}{2}, -2, 2, \frac{1}{2}$ ઉકેલો છે. અગાઉ $0, -1, 1$ આવેલા હોઈને $a_4 = -\frac{1}{2}$, $a_5 = -2$, $a_6 = 2$, $a_7 = \frac{1}{2}$.

આ પ્રમાણે આપણે ઊંચાઈ વધારતા જઈએ, અને દરેક ઊંચાઈએ આપણને સીમિત (Finite) નવી બૈજિક સંખ્યાઓ મળશે. આપણે બધા જ પૂર્ણાંક માટે ઊંચાઈ લઈને દરેક પૂર્ણાંકે નવી સીમિત બૈજિક સંખ્યાઓ મેળવી શકીએ. અને આ બધી બૈજિક સંખ્યાઓને પૂર્ણાંકો જોડે અનુપમ રીતે જોડી શકાય. આથી બૈજિક સંખ્યાઓનો ગણ ગણ્ય અનંત ગણ છે.

બધી જ વાસ્તવિક સંખ્યાઓના બે ભાગ પાડ્યા. બૈજિક સંખ્યાઓ અને બીજાતીત સંખ્યાઓના ગણો. આ બંને ગણોના જોડાણથી વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો અગણ્ય અનંત ગણ મળે. બૈજિક સંખ્યાઓનો ગણ ગણ્ય અનંત ગણ છે. અગાઉના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને આપણે સાબિત કરી શકીએ કે બીજાતીત સંખ્યાઓનો ગણ અગણ્ય અનંત ગણ મળે.

બીજાતીત સંખ્યાઓ : જ્યારે π કે e બીજાતીત સંખ્યાઓ હોવાની માત્ર શંકા હતી, તેઓ બીજાતીત સંખ્યાઓ છે તે સાબિત થયું ન હતું. અરે એક પણ બીજાતીત સંખ્યા શોધાઈ ન હતી, તે પહેલાં કેન્ટરે સાબિત કરેલું કે બીજાતીત સંખ્યાઓનો ગણ અગણ્ય અનંત ગણ છે. પણ, કોઈ બીજાતીત સાબિત કરેલી કોઈ સંખ્યા ન હતી.

લિઓવિલીએ (Liouville) 1844માં સૌથી પહેલી બીજાતીત સંખ્યા સાબિતી સાથે આપી અને 1851માં સરળ સાબિતી આપી.

પ્રમેય : વાસ્તવિક સંખ્યા $x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} = \frac{1}{10^{k!}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{24}} + \ldots$ બીજાતીત સંખ્યા છે. આ સંખ્યા લિઓવિલી બીજાતીત સંખ્યા તરીકે ઓળખાય છે.

સાબિતી : આની સાબિતીમાં ત્રણ ભાગ છે.

પહેલો ભાગ x_0ની વ્યાખ્યા આપતી શ્રેણી અભિસારી (Convergent) છે તે તુલના પરીક્ષણથી (Comparision test) સાબિત થઈ શકે. $k! \geq k$ આથી $10^{k!} \geq 10^k$.

$$\therefore \quad \frac{1}{10^k} \geq \frac{1}{10^{k!}}.$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k}$ સમગુણોત્તર શ્રેઢી હોઈને તેનો સરવાળો $\frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9}$ છે. આથી આ શ્રેઢી અભિસારી છે. $\frac{1}{10^k} \geq \frac{1}{10^{k!}}$ હોઈને શ્રેઢી $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}$ પણ અભિસારી શ્રેઢી છે.

બીજો ભાગ x_0 અસંમેય સંખ્યા છે. x_0 ની કિંમત દશાંશમાં લખતાં x_0 = 0.110001000.... જ્યાં, અશૂન્ય જગ્યાઓ એક, બે, છ, ચોવીસ વગેરે. આમાં દશાંશની જગ્યાઓનું પુનરાવર્તન થતું ન હોઈને તે અસંમેય સંખ્યા છે.

હવે આપણે x_0 સંખ્યા બીજાતીત સંખ્યા છે તે સાબિત કરવા માટે ધારીએ કે x_0 બૈજિક અસંમેય સંખ્યા છે અને તેના માટેનું સમીકરણ ઓછામાં ઓછું દ્વિપદી સમીકરણ હોય. બૈજિક અસંમેય ઉકેલોના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરીશું.

લિયોવિલી અસમીકરણ (Liouville Inequality)

x_0 બૈજિક અસંમેય સંખ્યા છે. અંતરાલ $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ માં $\frac{p}{q}$ સંમેય સંખ્યા હોય તો આપણે A > 0 મેળવી શકીએ કે જેથી $\left|\frac{p}{q} - x_0\right| \geq \frac{1}{Aq^n}$ થાય.

સાબિતી : x_0 બૈજિક અસંમેય સંખ્યા હોઈને તે લઘુઘાતી સમીકરણ $P(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + ... + gx + h = 0$નો ઉકેલ છે. અહીંઆં $a, b, c,..., g$ અને h પૂર્ણાંકો અને $n \geq 2$ છે. છે.

$P'(x) = nax^{n-1} + b(n-1)x^{n-2} + ... + g$. આ બહુપદી અંતરાલ $[x_0 - 1, x_0 + 1]$ માં સીમિત હોઈને $|P'(x)| \leq B$ થશે.

અંતરાલ, $\left[\frac{p}{q} - x_0\right]$ માં P(x)નું વિકલન મળતું હોઈને, અંતરાલમાં $\left[\frac{p}{q} - x_0\right]$ એવું C બિંદુ છે કે જેથી મધ્યકમાનના પ્રમેયથી (The Mean Value Theorem).

$$\frac{P\left(\frac{p}{q}\right) - P(x_0)}{\frac{p}{q} - x_0} = P'(C)$$

$P(x) = 0$ હોઈને $\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = |P'(C)| \left|\frac{p}{q} - x_0\right|$ છે.

બંને બાજુએ સાદુરૂપ આપવા માટે q^n ગુણતાં,

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right)q^n\right| \leq B\left|\frac{p}{q} - x_0\right| q^n$$

$P\left(\frac{p}{q}\right) q^n$ પૂર્ણાંક હોઈને,

$$\left|\frac{p}{q} - x_0\right| \geq \frac{\left|P\left(\frac{p}{q}\right)q^n\right|}{B} \cdot \frac{1}{q^n}$$

$\frac{1}{A} = \left|\frac{P\left(\frac{p}{q}\right)q^n}{B}\right|$ લેતાં આપણને $\left|-\frac{p}{q} - x_0\right| \geq \frac{1}{Aq^n}$ મળે.

આપણે પૂર્ણાંક $m > n$ લઈએ અને $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{10^{k!}} = \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^6} + ... + \frac{1}{10^m}$

$$= \frac{10^{m-1} + 10^{m-2} + ... 10^m}{10^m} = \frac{Pm}{10^m}$$

અહીંયાં $p_m = 10^{m-1} + 10^{m-2} + ... + 10^m$ પૂર્ણાંક છે. આથી $\frac{Pm}{10^m}$ સંમેય સંખ્યા છે.

આથી, $\left|\frac{Pm}{10^m} - x_0\right| = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = \frac{1}{10^{(m+1)!}} + \frac{1}{10^{(m+2)!}} + \frac{1}{10^{(m+3)!}} + ...$

$$\leq \frac{1}{10^{(m+1)!}} + \frac{1}{10^{(m+1)!}} + \frac{1}{10^{(m+1)!}} + ...$$

$$= \frac{1}{10^{(m+1)!}}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + ...\right)$$

$$= \frac{1}{10^{(m+1)!}}\left(\frac{10}{9}\right) < \frac{2}{10^{(m+1)!}}$$

લિયોવિલી અસમીકરણથી, $\left|\frac{Pm}{10^m} - x_0\right| \geq \frac{1}{A(10^{m!})^n}$

$$\therefore \quad \frac{1}{A} \leq (10^{m!})^n \left|\frac{Pm}{10^m} - x_0\right|$$

$$< (10^{m!})^n \cdot \frac{2}{10^{(m+2)!}} = \frac{2}{10^{(m+2)!}} - m!\, n$$

$$= \frac{2}{10^{m!(m+1-n)}} < \frac{2}{10^{m!}} \quad m > n$$

હોઈને $m + 1 - n > 1$ છે.

$$\therefore \quad \frac{1}{A} < \frac{2}{10^{m!}} \quad \therefore\ 2A > 10^{m!}$$

2A નિશ્ચિત સંખ્યા છે જ્યારે m વધે ત્યારે $10^{m!}$ ખૂબ જ મોટો થાય જે યોગ્ય ન હોઈને આપણી ધારણા x_0 બૈજિક અસંમેય સંખ્યા છે તે ખોટી હોઈને x_0 બીજાતીત સંખ્યા છે. 1873માં ચાર્લ્સ હર્મિટે (Charles Hermite) સાબિત કર્યું કે e બીજાતીત સંખ્યા છે. આ પછી નવ વર્ષે ફર્ડિનાન્દ લિન્ડમેને (Ferdinand Lindemann) સાબિત કર્યું કે π પણ બીજાતીત સંખ્યા છે. 1934માં એ. ઓ. ગેલફોન્ડે (A. O. Gelfond) સાબિત કર્યું કે જો a 0 અને 1 વગરની કોઈ પણ બૈજિક સંખ્યા હોય અને b અસંમેય સંખ્યા હોય, તો a^b બીજાતીત સંખ્યા છે. જેમકે $3^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{3}^{\sqrt{7}}$ વગેરે બીજાતીત સંખ્યાઓ છે. ઘણી બધી સંખ્યાઓ બીજાતીત સંખ્યાઓ છે તે સાબિત કરવાનું બાકી છે.

આ લેખ નીચેના પુસ્તકના આધારે લખાયો છે :

(1) William Dunham, The Calculus Gallery Masterpieces From Netwon to Lebesgue, Princeton University Press, 2005

– વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ

નરસિંહજીના મંદિર પાસે, ઉવારસદ રોડ,

મુ.પો. શેરથા, તા.જિ. ગાંધીનગર, મો : 9428019042

●