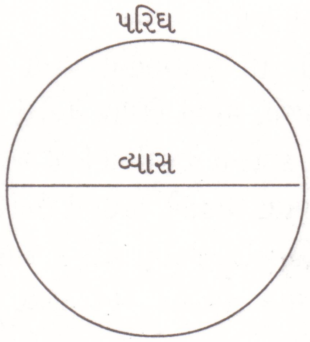
સોનેરી ગુણોત્તર
(The Golden Ratio)

– વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ

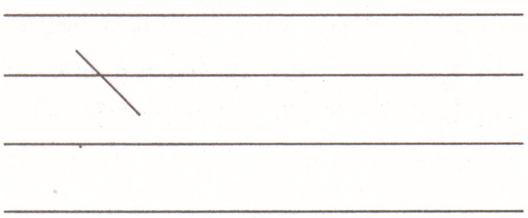


આકૃતિ 1

ઘણી સંખ્યાઓ આપણને આશ્ચર્યચકિત કરે છે. આમાંની એક સંખ્યા π (પાઈ, Pi) છે જે આકૃતિ 1માં બતાવેલા વર્તુળના પરિઘ અને વ્યાસનો ગુણોત્તર છે.

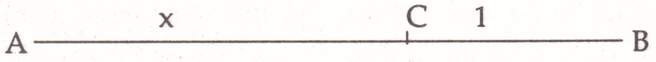
$$\pi = \frac{\text{પરિઘ}}{\text{વ્યાસ}}$$

ભૂમિતિમાં π ની વ્યાખ્યા આવે છે. π બીજી પણ અણધારી જગ્યાએ દેખાડો દે છે. શક્યતાઓની ગણતરીમાં π દેખાય છે. જાણીતા બફૂનની સોયના (Buffon's needle) દાખલામાં π દેખાય છે. ફ્રેન્ચ ગણિતશાસ્ત્રી જ્યૉર્જ લ્યુઇસ લેકલેર્ક, કૉમ્ટે ડી બફૂને (George – Louis Leclerc, Compte de Buffon (1707-1788)) પ્રશ્ન કર્યો અને તેનો જવાબ પણ તેમણે 1777માં આપ્યો. પ્રશ્ન : આકૃતિ-૨ માં બતાવ્યા પ્રમાણે સમાંતર લીટીઓ દોરેલો મોટો કાગળ છે. આ સમાંતર લીટીઓના વચ્ચેના અંતર જેટલી લંબાઈની સોય છે. આ સોયને આ સમાંતર લીટીઓ દોરેલા મોટા કાગળ ઉપર ફેંકવામાં આવે છે. આ સોય આકૃતિ-2માં બતાવ્યા પ્રમાણે કોઈ પણ એક જ સમાંતર રેખાને ફક્ત એક જ જગ્યાએ કાપતી પડવાની શક્યતા કેટલી ? આશ્ચર્ય થાય તેવો જવાબ છે. જવાબ $\frac{2}{\pi}$ હોઈને, એક હજાર વખત સોયને મોટા કાગળ ઉપર ફેંકીને ગણી શકાય કે આ સોય કેટલી વખત આ સમાંતર રેખાઓમાંની એક જ રેખાને એક જ જગ્યાએ કાપશે. આના બરાબર $\frac{2}{\pi}$ થાય અને આના ઉપરથી π ની કિંમત શોધી શકાય.



આકૃતિ 2

આવી જ પણ ઓછી જાણીતી સંખ્યા સોનેરી ગુણોત્તર ø (Phi, ફિ) છે. ઈ.સ. પૂર્વે 300માં એલિમેન્ટસ્‌ના લેખક યુક્લિડે આકૃતિ-3માં બતાવેલી સુરેખા AB ઉપર C બિંદુ શોધ્યું કે જે આકૃતિ-3માં બતાવેલી સુરેખા ABને એ રીતે છેદે કે જેથી



આકૃતિ 3

$$\frac{\text{AB (સુરેખાની લંબાઈ)}}{\text{AC (મોટા કાપેલા ભાગની લંબાઈ)}} = \frac{\text{AC (મોટા કાપેલા ભાગની લંબાઈ)}}{\text{CB (નાના કાપેલા ભાગની લંબાઈ)}}$$ થાય.

ધારો કે, $CB = 1$ અને $AC = x$ છે.

આથી $$\frac{1+x}{x} = \frac{x}{1}$$

$$\therefore 1 + x = x^2$$

$\therefore x^2 - x - 1 = 0$. આ સમીકરણના ઉકેલો

$$\left[x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ અને } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ છે.}\right]$$

આ બંને ઉકેલોમાં ધન ઉકેલ $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$ સોનેરી ગુણોત્તર તરીકે ઓળખાય છે.

આશ્ચર્ય જેવી વસ્તુ

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180\ 3398...$$

$$\phi^2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \phi$$

$$= 2.6180\ 3398....$$

$$\frac{1}{\phi} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 = \phi - 1$$

$$= 0.6180\ 3398....$$

$$= \phi - 1$$

તો ϕ, ϕ^2 અને $\frac{1}{\phi}$ માં દશાંશના ટપકા પછીના બધા જ આંકડાઓ સરખા છે.

કોઈ અજાણી જગ્યાએ ગયા હોઈએ અને કોઈ ઓચિંતા જૂના મિત્ર મળી જાય તેમ સોનેરી ગુણોત્તર પણ ન ધારેલી જગ્યાએ મળે છે. આપણે $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+......}}}$ ની કિંમત જાણવી છે.

$$\sqrt{1+\sqrt{1}} = \sqrt{2} = 1.41421$$

$$\sqrt{1+\sqrt{}+\sqrt{}} \quad \sqrt{1+1.4121...} = \sqrt{}$$

$$\sqrt{1+\sqrt{}+\sqrt{}+\sqrt{}} \quad \sqrt{1+1.55377...} =$$

ધારો કે $x = \sqrt{1+\sqrt{}\ \sqrt{1+......}}$ છે. બંને બાજુએ વર્ગ કરતાં,

$x^2 = 1 + \sqrt{1+\sqrt{}\ ......} = 1 + x$ થાય.

આથી $x \;\; - x - 1 = 0$ ના ઉકેલો $x = \dfrac{(1+\sqrt{5})}{2}$ અને $x = \dfrac{(1-\sqrt{5})}{2}$ મળે.

કિંમત ધન હોઈને $x = \sqrt{1+\sqrt{\;\sqrt{1+\ldots\ldots}}} = \dfrac{(1+\sqrt{5})}{2} = \phi = 1.6180\ 33\ldots$ છે.

સંખ્યાશાસ્ત્રમાં (Theory of Numbers) પરંપરિત અપૂર્ણાંક $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}$ વારંવાર વપરાય છે. તેની કિંમત આપણે મેળવીએ.

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}} = 1+\frac{2}{3} = 1.666\ldots$$

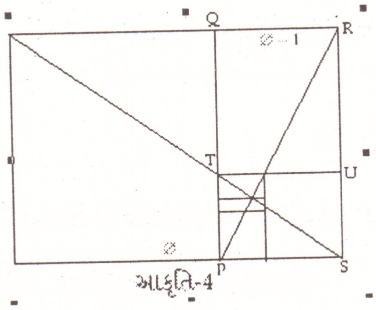
$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}} = 1+\frac{1}{5/3} = 1+\frac{3}{5} = 1.6.$$

ધારો કે, $x = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}} = 1+\dfrac{1}{x}$ છે.

આથી $x = 1+\dfrac{1}{x}$ છે. આના બરાબર $x^2 - x - 1 = 0$ છે.

આ સમીકરણના ઉકેલો $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ અને $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ છે.

xની કિંમત ધન હોઈને $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$ છે.



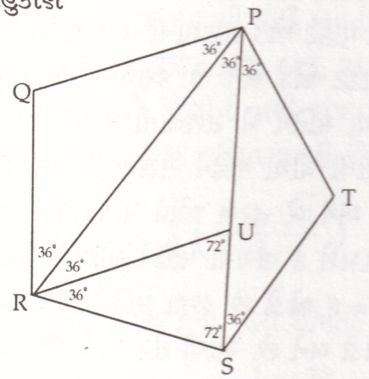
આકૃતિ-4

આથી $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}} = \phi = 1.6180\ 33\ldots\ldots$

આકૃતિ-4માં બતાવ્યા પ્રમાણે લંબચોરસ લઈએ કે જેમની બાજુઓની લંબાઈ 1 અને પહોળાઈ ϕ હોઈને બાજુઓનો ગુણોત્તર ϕ થશે. આવા લંબચોરસો સોનેરી

લંબચોરસો તરીકે ઓળખાય છે. આ સોનેરી લંબચોરસમાં આકૃતિ-4માં બતાવ્યા પ્રમાણે 1 લંબાઈનો ચોરસ દોરીએ. આથી સોનેરી લંબચોરસમાં નાનો લંબચોરસ PQRS બન્યો જેની બાજુ PQની લંબાઈ 1 અને બાજુ QRની લંબાઈ ϕ-1 છે. આથી બાજુઓનો ગુણોત્તર $\frac{1}{\phi-1} = \frac{1}{1/\phi} = \phi$ છે. આ લંબચોરસ PQRS પણ સોનેરી લંબચોરસ છે. આ સોનેરી લંબચોરસ PQRSમાં ચોરસ QRUT દોરીએ જેની બાજુઓની લંબાઈ ϕ - 1 છે. આથી બાજુઓનો ગુણોત્તર $\frac{\phi-1}{1-(\phi-1)} = \frac{1/\phi}{1-1/\phi} = \frac{1}{\phi-1} = \phi$ છે. આથી આ સોનેરી લંબચોરસ PQRSમાં નાનો લંબચોરસ TUSP બન્યો જેની બાજુઓ $\phi - 1$ અને $1 - (\phi - 1)$ છે.આથી લંબચોરસ TUSP પણ સોનેરી લંબચોરસ છે. સોનેરી લંબચોરસો PQRS અને PTUS મા-પુત્રી સોનેરી લંબચોરસો તરીકે ઓળખાય છે. આ જ રીતે સોનેરી લંબચોરસનું ચોરસ અને સોનેરી લંબચોરસમાં વિભાજન કરતાં, નાના અને નાના સોનેરી લંબચોરસો મળશે. આ નાના લંબચોરસો આખરે ન પહોંચી શકાય તેવા બિંદુએ પહોંચશે. ગણિતશાસ્ત્રી ક્લિફર્ડ પિકોવર (Clifford Pickover) આવા બિંદુને ભગવાનની આંખ (Eye of God) કહે છે. મા-પુત્રીના આકૃતિ-4માં બતાવ્યા પ્રમાણેના એકબીજાને છેદતા બે કર્ણો દોરો. આ છેદતા બિંદુએ બાકીના બધા મા-પુત્રીના કર્ણો છેદશે.

બહુકોણ



આકૃતિ-5

જેની બધી બાજુઓ અને અંદરના ખૂણાઓ સરખા હોય તેવા નિયમિત બહુકોણના અંદરના ખૂણાઓનો સરવાળો 180(n−2) છે. અહીંયા n બાજુઓની સંખ્યા છે. ત્રિકોણમાં n = 3 છે અને ત્રિકોણના અંદરના ખૂણાઓનો સરવાળો 180^0 છે. n = 5 એ નિયમિત પંચકોણ છે, જે આકૃતિ-5 માં આપ્યો છે. આ નિયમિત પંચકોણના અંદરના ખૂણાઓનો સરવાળો 540^0 છે. અને દરેક ખૂણો $540^0/5 = 108^0$ છે. આ પંચકોણના બાજુ બાજુના બે કર્ણો PR અને PS દોરો. $\angle$PRSના બે સરખા ભાગ કરીને RU જોડો.

Δ^s PRS અન RUS સમરૂપ હોઈને $\frac{PS}{RU} = \frac{RS}{US}$ છે.

PU = RU = RS = ST = PT = PQ = RO હોઈને $\frac{PS}{PU} = \frac{PU}{US}$ આથી U, PSનું સોનેરી ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

સમદ્વિબાજુ ΔPRSમાં

$\frac{\text{બાજુ}}{\text{પાયો}} = \frac{PS}{RS} = \frac{PS}{PU} = \phi$ હોઈને, ΔPRS સોનેરી ત્રિકોણ તરીકે ઓળખાય છે.

ΔRUS માં, $\frac{\text{બાજુ}}{\text{પાયો}} = \frac{RU}{US} = \frac{PU}{US} = \phi$ હોઈને ΔRUS પણ સોનેરી ત્રિકોણ છે.

ΔPTS માં $\frac{\text{બાજુ}}{\text{પાયો}} = \frac{PT}{PS} = \frac{PU}{PS} = \frac{1}{PS/PU} = \frac{1}{\phi}$ છે.

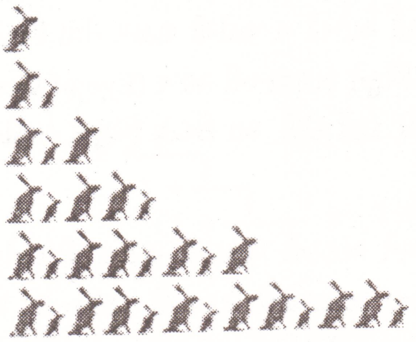
આથી ΔPTS સોનેરી ગ્નોમૉન (Golden Gnomon) તરીકે ઓળખાય છે. સોનેરી ΔPRSનું સોનેરી ΔRUS અને સોનેરી ગ્નોમૉન $\Delta PRU \equiv \Delta PTS$માં વિભાજન થયું. આ જ રીતે સોનેરી ΔRUSનું પણ વિભાજન થઈ શકે.

નવ ઇન્ડિયન આકૃતિઓ 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 છે.

આ નવ આકૃતિઓ અને સંજ્ઞા 0 થી.... કોઈ પણ સંખ્યા નીચે બતાવ્યા પ્રમાણે લખી શકાય.

આ વાક્યથી શરૂ થતું પુસ્તક લિબર એબેસિ (Liber Abaci) ઈ.સ. 1202માં લીઓનાર્ડો ફિબોનાચિએ (Leonardo Fibonacci) પ્રસિદ્ધ કર્યું. આ પુસ્તકનાં પહેલાં સાત પ્રકરણોમાં સંખ્યાઓને આપણી દશાંશ પદ્ધતિથી દર્શાવવાની રીત અને તેના ઉપયોગો દર્શાવ્યા છે. બારમા પ્રકરણમાં સુંદર મઝાનો નીચેનો પ્રશ્ન છે :

ચારે બાજુએ દીવાલ હોય તેવી જગ્યામાં એક સસલાની જોડી કોઈ માણસે રાખી છે. આ જોડી દર મહિને એક સસલાની જોડીને જન્મ આપે છે. આ નવી જન્મેલી જોડી બીજા મહિનાથી નવી જોડીને જન્મ આપે છે. વર્ષના આખરે સસલાની કેટલી જોડીઓ હશે ?



આકૃતિ-6

આ પ્રશ્નના કારણે ગણિત અને વિજ્ઞાનના વિદ્યાર્થીઓએ ફિબોનાચિનું નામ સાંભળ્યું છે. ફિબોનાચિ હુલામણું નામ છે. લેટિન શબ્દો ફિલિયસ બોનાચિ (Filius Bonacci) એટલે કે બોનાચિ કુટુંબનો પુત્ર પરથી આવેલું છે. આ પ્રશ્નનો ઉકેલ આમ તો સરળ છે. પહેલી જોડ પાકટ જોડ છે. આ જોડ બીજા મહિને સસલાની જોડને જન્મ આપે છે. આથી બીજા મહિને એક પાકટ અને બીજી તરુણ જોડ એમ બે જોડ છે. ત્રીજા મહિને પાકટ જોડ સસલાની નવી જોડને જન્મ આપે છે અને તરુણ જોડ પાકટ જોડ બને છે. આથી ત્રીજા મહિને સસલાની ત્રણ જોડો છે. ચોથા મહિને બે સસલાની પાકટ જોડો બે સસલાની જોડોનો જન્મ આપે છે અને તરુણ જોડ પાકટ જોડ બને છે. આથી ચોથા મહિને સસલાની પાંચ જોડો છે. પાંચમા મહિને ત્રણ પાકટ જોડો ત્રણ તરુણ જોડોને જન્મ આપે છે અને બે તરુણ જોડો પાકટ જોડો બને છે. આથી પાંચમા મહિને સસલાની આઠ જોડો છે. આના ઉપરથી જોઈ શકાશે કે પાંચમા મહિને ચોથા મહિનાની જોડો અને ત્રીજા મહિનાની જોડોનો સરવાળો બને છે. એટલે કે 5 + 3 = 8 જોડો છે. છઠ્ઠા મહિને પાંચ પાકટ જોડો પાંચ તરુણ જોડોનો જન્મ આપે છે. અને ત્રણ તરુણ જોડો પાકટ જોડો બને છે. આથી તેર જોડો છે. આના ઉપરથી જોઈ શકાશે કે છઠ્ઠા મહિને પાંચમા મહિનાની આઠ જોડો અને ચોથા મહિનાની પાંચ જોડોનો સરવાળો બને છે એટલે કે 8 + 5 = 13 છે.

આથી નીચેના ક્રમ પ્રમાણે જોડો મળે છે.

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

આને પાકટ અને તરુણના ક્રમોમાં ગોઠવતાં

પાકટ : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

તરુણ : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

ઓગણીસમી સદીમાં ફ્રેન્ચ ગણિતશાસ્ત્રી ઇડોયાર્ડ લુકાસે (Edourd Lucas) શ્રેણી {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...} ને ફિબોનાચિ શ્રેણી તરીકે ઓળખવી શરૂ કરી. આના જેવી શ્રેણી ઘણી જગ્યાએ મળે છે.

બાળક સીડી ચઢે છે. વધારેમાં વધારે બે પગથિયાં એકીસાથે ચઢી શકે છે. આથી દરેક પગલે તે એક પગથિયું ચઢે કે એકીસાથે બે પગથિયાં ચઢે. જો n પગથિયાં હોય તો કેટલી જુદી જુદી રીતે C_n તે પગથિયાં ચઢશે ?

એક જ પગથિયું હોય, તો એક જ રીતે ચઢશે : 1 $C_1 = 1$

બે પગથિયાં હોય, તો 1 + 1, 2 રીતે ચઢશે : 2 $C_2 = 2$

ત્રણ પગથિયાં હોય, તો 1 + 1 + 1, 2 + 1, 1 + 2 રીતે ચઢશે : 3 C_3 = 2

ચાર પગથિયાં હોય, તો 1 + 1 + 1 + 1, 2 + 2, 1 + 1 + 2,

2 + 1 + 1, 1 + 2 + 1 રીતે ચઢશે : 5 C_4 = 5

પાંચ પગથિયાં હોય, તો 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 1 + 2 + 2, 2 + 2 + 1,

2 + 1 + 2, 1 + 1 + 2 + 1, 1 + 2 + 1 + 1, 2 + 1 + 1,

1 + 1 + 1 + 2 રીતે ચઢશે : 8 C_5 = 8

આથી શક્યતાઓ 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... જે ફિબનાચિના જેવી શ્રેણી છે.

આપણે ફિબોનાચિ શ્રેણીની {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...} વારાફરતી આવતી રકમોના ગુણોત્તર જોઈએ.

1/1 = 1, 2/1 = 2, 3/2 = 1.5, ... 233/144 = 1.61805, 377/233 = 1.61802, 610/377 = 1.61803, 987/613 = 1.61803, ...

આ સંખ્યા સોનેરી ગુણોત્તરની આસપાસ ફરે છે. સામાન્ય રીતે ફિબોનાચિની n મી સંખ્યા F_n વડે દર્શાવવામાં આવે છે. જોહાનેસ કેપ્લરે (Johannes Kepler) ઈ.સ. 1611માં શોધી કાઢેલું કે જેમ જેમ nની કિંમત વધતી જશે તેમ તેમ ગુણોત્તર F_{n+} / F_n ગુણોત્તર ϕ ની નજીક પહોંચશે.

ફિબોનાચિ શ્રેણીમાં આપણે ચાલુ સંખ્યા આગળની બે સંખ્યાઓનો સરવાળો કરીને મેળવતા હોઈને શ્રેણીની સંખ્યાઓ ખૂબ જ ઝડપથી મોટી બનતી જાય છે. ફિબોનાચિ શ્રેણીની પાંચમી સંખ્યા પાંચ છે. જ્યારે 125મી સંખ્યા 59, 425, 114, 757, 512, 643, 212, 875, 125 છે.

ફિબોનાચિ શ્રેણીની nમી સંખ્યાનું સૂત્ર ઑઈલર (Euler) અને દ મોવરેએ (de Maiver) શોધેલું પણ ભુલાઈ ગયેલું. ફ્રેન્ચ ગણિતશાસ્ત્રી બિનેટે (Binet) ફરીથી શોધેલું જે બિનેટ સૂત્ર તરીકે ઓળખાય છે અને જે

$$n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\phi - \left(\frac{-1}{\phi} \right) \right]$$ છે.

બીજી રકમ nની મોટી કિંમતો માટે નાની હોઈને F_n ની કિંમત પહેલી રકમથી પણ મળી શકે. જેમ કે

n = 20]માટે $F = \frac{1}{\sqrt{5}} \phi^{20}$ = 6765.00003 આથી F = 6765 છે.

પહેલી દશ ફિબનાચિ સંખ્યાઓનો સરવાળો 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143 છે. અગિયારમી સંખ્યા 89 છે અને બારમી સંખ્યા 144 છે જે પહેલી દશ સંખ્યાના સરવાળાથી એક વધારે છે. પહેલી વીસ ફિબનાચિ સંખ્યાઓનો સરવાળો 17,710 છે. જ્યારે બાવીશમી સંખ્યા 17,711 છે જે પહેલો વીશ સંખ્યાના સરવાળાથી એક વધારે છે. આથી 1 થી n સુધીની ફિબનાચિ સંખ્યાઓના સરવાળા બરાબર n + 2મી સંખ્યામાંથી એક બાદ કરીએ તેટલો થાય.

ફિબનાચિ સંખ્યા 13 લઈએ, તેનો વર્ગ 13^2 = 169 થાય. 13ની આસપાસની બે ફિબનાચિ સંખ્યાઓ 8 અને 21નો ગુણાકાર 8 x 21 = 168 થાય. આ બંને વચ્ચેનો તફાવત 1 છે. આ જ રીતે 21^2 = 441 થાય અને 21ની આસપાસની ફિબનાચિ સંખ્યાઓ 13 અને 34નો ગુણાકાર 13 x 34 = 442 થાય. આ બંને વચ્ચેનો તફાવત −1 છે. કોઈ પણ ફિબનાચિ સંખ્યાના વર્ગ અને તે સંખ્યાની આસપાસની ફિબનાચિ સંખ્યાઓના ગુણાકારનો તફાવત +1 છે.

નરસિંહજીના મંદિર પાસે,
ઉવારસદ રોડ, શેરથા.
M. 9428019042