ઉપવલયી ભ્રમણકક્ષાઓ (Elliptic Orbits)

વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ

પ્રસ્તાવના

ન્યૂટને પ્રિન્સિપિયાને ત્રણ પુસ્તકોમાં વહેંચ્યાં છે. પહેલા પુસ્તકમાં ગતિશાસ્ત્રના પાયાના સિદ્ધાંતો વિકસાવ્યા છે. બીજા પુસ્તકમાં અવરોધ કરતા માધ્યમમાં ગતિશાસ્ત્રના પાયાના સિદ્ધાંતો વિકસાવ્યા છે, જ્યારે ત્રીજું પુસ્તક પહેલાં બે પુસ્તકમાં જે સિદ્ધાંતો વિકસાવ્યા તેનો ઉપયોગ કરીને સૂર્યમંડળનો અભ્યાસ કરે છે.

પહેલા પુસ્તકમાં ગતિશાસ્ત્રના સિદ્ધાંતો વિકસાવીને પ્રમેયો, ઉપપ્રમેયના સ્વરૂપમાં આપ્યાં છે. જેમ જેમ આગળ વધતા જઈએ તેમ તેમ પ્રમેયો અઘરાં બનતાં જાય છે. કુલ્લે 98 પ્રમેયો છે અને પ્રમેયોનાં ઉપપ્રમેયો પણ ખરાં. ખરેખર બધાં પ્રમેયોનો અભ્યાસ કરવો મુશ્કેલ હોઈને આપણે જરૂરી અને અગત્યનાં પ્રમેયોનો અભ્યાસ કરીશું.

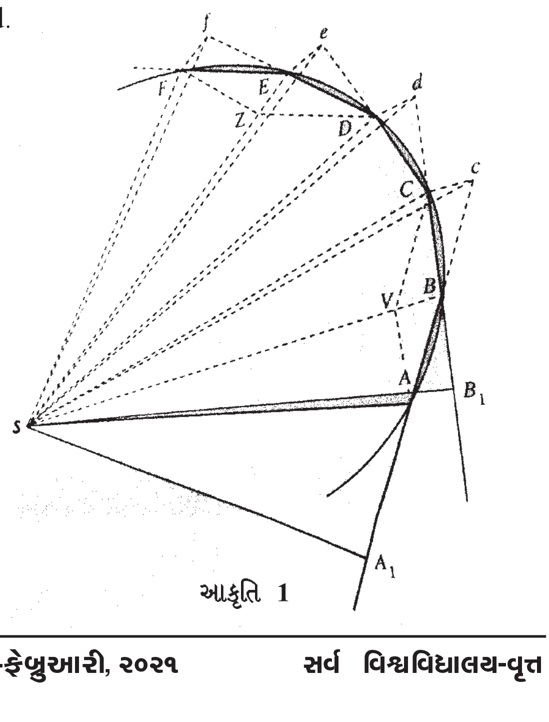
ક્ષેત્રફળનું પ્રમેય

ગ્રહો સૂર્યની આસપાસ ઉપવલયી ભ્રમણકક્ષામાં ફરે છે. ઉપવલય હોઈને બે નાભિઓ છે. એક નાભિથી જુદા જુદા સમયે બે જુદી જુદી જગ્યાએ ગ્રહ છે. ગ્રહને બિંદુ ગણતાં ભ્રમણકક્ષાના વક્ર ઉપરનાં બે બિંદુઓ છે. આ બિંદુઓને નાભિને જોડતાં ક્ષેત્રફળ મળે. વક્ર ઉપરના એક બિંદુથી બીજા બિંદુએ જતાં જે સમય લાગે તે સમયમાં આ ક્ષેત્રફળ મળે. કેપ્લરે જોયેલું કે સરખા સમયમાં ગ્રહ સરખું જ ક્ષેત્રફળ કાપે છે. આના જેવું જ પરિણામ કેન્દ્રગામી (Centripetal) બળ માટે ન્યૂટને પ્રમેય 1માં આપ્યું છે.

પ્રમેય 1 : The Areas which revolving bodies describe by radii drawn to an immovable canter of force do lie in the same immovable planes and are proportional to the times in which they are described.

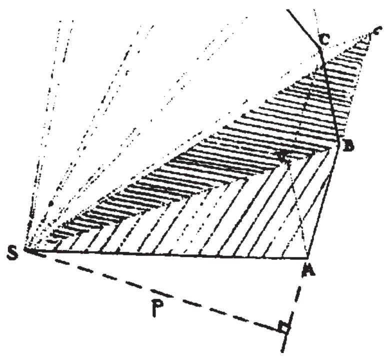
પરિક્રમણ કરતા પદાર્થો જ્યારે તેમની ભ્રમણકક્ષામાં ફરતા હોય છે ત્યારે આ પદાર્થો ઉપર લાગતા બળનાં સ્થિર કેન્દ્ર બિંદુઓને જોડતી ત્રિજ્યાઓ જે ક્ષેત્રફળો વર્ણવે તે સ્થિર સમતલોમાં આવેલા છે અને તે સમયના પ્રમાણમાં હોય છે.

ધારો કે કેન્દ્રગામી બળનું કેન્દ્ર S છે. ધારો કે આ કેન્દ્રગામી બળ સરખા સમય δt ના અંતરે પદાર્થ ઉપર લાગે છે. હડસેલાની જેમ લાગે છે અને વચ્ચે વચ્ચે લાગતું નથી. δt, $2\delta t$, $3\delta t$,... ના અંતરે આકૃતિ 1માં બતાવ્યા પ્રમાણે પદાર્થ B, C, D,... બિંદુઓએ છે. શરૂઆતમાં પદાર્થ A બિંદુએ છે અને ન્યૂટનના ગતિના પહેલા નિયમ પ્રમાણે વેગ v_A થી સીધી રેખામાં δt સમયમાં

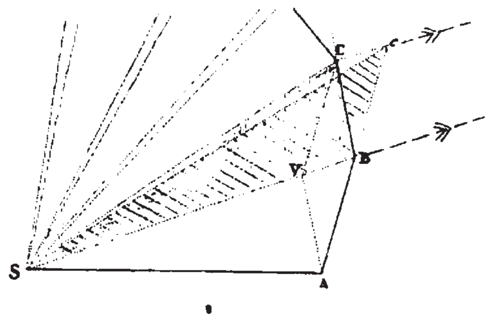


આકૃતિ 1

AB અંતર કાપે છે. હવે પછીના સમયમાં કોઈ બળ ન લાગે તો δt સમયમાં સીધી રેખામાં Bc અંતર કાપશે અને c બિંદુએ પહોંચશે, આથી AB = Bc છે અને આ AB ના જ સમતલમાં છે. S થી Ac નો લંબ એક જ હોઈને ક્ષેત્રફળ ΔSAB = ક્ષેત્રફળ ΔSBc આકૃતિ 2માં બતાવ્યા પ્રમાણે છે.



(a) $\Delta SAB = \Delta SBc$



(b) $\Delta SBA = \Delta SBc$

આકૃતિ 2

જ્યારે પદાર્થ B એ પહોંચે છે ત્યાં જ કેન્દ્રગામી બળ BS દિશામાં લાગે છે અને પદાર્થ સ્થળાંતર કરીને BS દિશામાં V બિંદુએ પહોંચે તેટલું બળ લાગે છે પણ પદાર્થ Bc દિશામાં જઈ રહ્યો હોઈને પદાર્થ ઉપર બે બળો લાગે છે આથી ચતુષ્કોણ VBcC નો કર્ણ BC પદાર્થની દિશા બને છે અને Δt સમયમાં (સુરેખા) BC અંતર કાપે છે. Cc//SB હોઈને, આકૃતિ 2(b)માં બતાવ્યા પ્રમાણે બે ત્રિકોણો SBc અને SBc નો પાયો SB છે અને આ બંને ત્રિકોણો સમાંતર રેખાઓ Cc અને SB વચ્ચે આવેલા હોઈને ઊંચાઈ સરખી હોઈને ક્ષેત્રફળો સરખાં છે એટલે કે ક્ષેત્રફળ ΔSBC = ક્ષેત્રફળ ΔSBc છે અને આપણે જાણીએ છીએ કે ક્ષેત્રફળ ΔSAB = ક્ષેત્રફળ ΔSBc હોઈને ક્ષેત્રફળ ΔSAB = ક્ષેત્રફળ ΔSBc = ક્ષેત્રફળ ΔSBC થાય. આ ઉપરાંત ΔSBC, ΔSAB ના સમતલમાં છે. આથી δt ના અંતરે બનતા ત્રિકોણોનું ક્ષેત્રફળ સરખું છે.

આ જ રીતે આગળ વધતાં $3\delta t$ ના અંતે પદાર્થ D બિંદુએ હશે અને SAB થી બનતા સમતલમાં છે અને ક્ષેત્રફળ ΔSCD = ક્ષેત્રફળ ΔSBc = ક્ષેત્રફળ ΔSAB. આથી δt સમયમાં પદાર્થ સરખું ક્ષેત્રફળ કાપે છે.

હવે δt નાનો લઈએ એટલે ત્રિકોણો નાના બનશે અને તેમની સંખ્યામાં વધારો થશે. પહોળાઈ ઘટતી જશે અને આખરે આપણો બહુકોણીય રસ્તો ABCDE... વક્ર ABCDE... પદાર્થની ભ્રમણકક્ષા બને છે અને કેન્દ્રગામી બળ સતત બને છે અને પદાર્થને તેના સ્પર્શકના રસ્તેથી પાછું ખેંચી લાવે છે.

કેવી સરળ, સુંદર અને ક્ષમતાવાળી સાબિતી !!

ઉપપ્રમેય 1 : The velocity of a body attracted towards an immovable center, in space void of resistance, is inversely as the perpendicular let fall from that center on the right line that touches the orbit.

કોઈ પણ પ્રકારના વિરોધો વગરના અવકાશના સ્થિર કેન્દ્રે ખેંચાઈ રહેલા પદાર્થનો વેગ, કેન્દ્રમાંથી ભ્રમણ-કક્ષાના સ્પર્શકને દોરેલા લંબની લંબાઈના વ્યસ્ત પ્રમાણમાં છે.

શરૂઆતમાં A બિંદુએ v_A પદાર્થની ગતિ છે જેથી $v_A\delta t$ = AB થાય. એ જ પ્રમાણે B બિંદુએ v_B પદાર્થની ગતિ છે જેથી $v_B\delta t$ = BC થાય. એ જ રીતે $v_C\delta t$ = CD, $v_D\delta t$ = DE... થાય.

આપણે સાબિત કર્યું કે ક્ષેત્રફળ ΔASB = ક્ષેત્રફળ ΔBSC = ક્ષેત્રફળ ΔCSD,... છે. આથી $\frac{1}{2}\, p_A AB$, જ્યાં p_A એ કેન્દ્ર S માંથી રેખા AB ને દોરેલો છે, ΔASB નું ક્ષેત્રફળ છે. એ જ પ્રમાણે $\Delta BSC = \frac{1}{2}\, p_B BC$, ક્ષેત્રફળ $\Delta CSD = \frac{1}{2}\, p_C CD$ ... થાય. આથી $p_A AB = p_A v_A \delta t = p_B BC = p_B v_B \delta t = p_C CD = p_C v_C \delta t v_A$ થાય. આથી,

$v_A p_A = v_B p_B = v_C p_C$ =.....

પ્રમેય 2 : Every body that moves in any curved line described in a plane, and by a radius drawn to a point either immovable, or moving forwards with a uniform rectilinear motion, describes about that point areas proportional to the times, is urged by a centripetal force directed to that point.

દરેક પદાર્થ જેની ભ્રમણકક્ષા સમતલમાં આવેલા વક્રથી દર્શાવી શકાય અને કોઈ સ્થિર બિંદુને અથવા સીધી રેખામાં એકધારી (uniform) ગતિથી ફરતા બિંદુને જોડતી ત્રિજ્યા જે ક્ષેત્રફળો વર્ણવે તે સમયના પ્રમાણમાં હોય, તો તે કેન્દ્રગામી બળ તે બિંદુ તરફ જાય તે અત્યાવશ્યક છે.

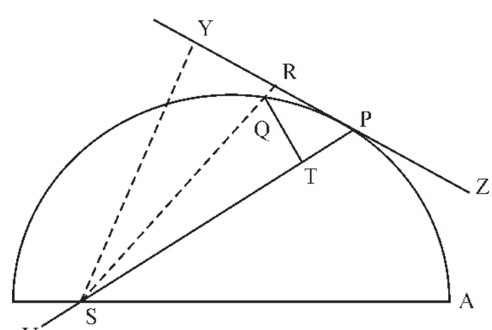
પ્રમેય 1 આપણને એમ કહે છે કે કેન્દ્રગામી બળ સરખા સમયમાં સરખું ક્ષેત્રફળ આપે છે, જ્યારે પ્રમેય 2 પ્રમેય 1નું ઊલટું પણ સાચું પ્રમેય છે. જો આપણને સરખા સમયમાં સરખું ક્ષેત્રફળ મળે, તો તે ગતિમાં રહેલા પદાર્થ ઉપર કેન્દ્રગામી બળ લાગે છે.

આ બંને પ્રમેયોએ ભ્રમણકક્ષાના ગતિશાસ્ત્રની (Orbital Mechanics) શરૂઆત કરવામાં ખૂબ જ અગત્યનો ભાગ ભજવ્યો છે.

કેન્દ્રગામી બળ

જો આ આધુનિક ગતિશાસ્ત્રનું પુસ્તક હોત તો પછીનું પગલું જુદાં જુદાં બળો લઈને તેમની અસર નીચે ફરતા પદાર્થોની જુદી જુદી ભ્રમણકક્ષાઓ મેળવવાનો હોત. ન્યૂટન આ કરે છે, પણ તેમનું આ પહેલું પગલું નથી. ન્યૂટનનો પહેલો પ્રયાસ આપેલી ભ્રમણકક્ષા કયા બળો ઊભી કરે છે તે મેળવવાનો છે. ન્યૂટન માટે સીધો પ્રશ્ન (Direct problem) કયું બળ ખાસ ભ્રમણકક્ષાએ લઈ જશે તે બળ મેળવવાનો છે. આનાથી ઉલટો પ્રશ્ન બળ આપેલું છે તેનાથી ઊભી થતી ભ્રમણકક્ષા મેળવવાનો છે.

કોઈ પણ ભ્રમણકક્ષા લઈને તેને ઊભું કરનાર બળનું સૂત્ર મેળવવાની રીત પ્રમેય 6 તરીકે ઓળખાય છે. ન્યૂટને આ રીત પ્રમેય 6માં આપી છે. ભ્રમણકક્ષામાં ફરતા પદાર્થની ગતિમાં વિરોધ કરતું કોઈ બળ નથી. પ્રિન્સિપિયાની ખૂબ જ જાણીતી આકૃતિ આપણે આકૃતિ 3માં દર્શાવીએ છીએ. આકૃતિ 3માં વક્રનો આકાર ઉપવલય જેવો છે પણ ગમે તે વક્ર માટે આ સૂત્ર છે.



આકૃતિ 3

P બિંદુએ આવેલા પદાર્થને કેન્દ્રગામી બળ કેન્દ્ર S ની દિશામાં લાગે છે. ન્યૂટનના પહેલા નિયમ પ્રમાણે આકૃતિ 3માં આપેલા વક્ર ઉપરના P બિંદુથી પદાર્થ સ્પર્શકની દિશામાં PR અંતર એકધારી ગતિથી કાપે છે અને R બિંદુએ કેન્દ્રગામી બળ પદાર્થ ઉપર લાગતાં સીધી દિશામાં મુસાફરી કરવાના બદલે RQ દિશામાં પદાર્થ Q બિંદુએ આવશે. કેન્દ્રગામી બળ F δt સમય માટે પદાર્થને લાગતું હોઈને પદાર્થ R થી Q બિંદુએ આવશે. કેન્દ્રગામી બળ Fનો પરિમેય (Magnitude) આપેલા સમય δt માં R થી Q ના વિચલનથી (Deflection) માપી શકાય. SP ને સમાંતર સુરેખા RQ વક્રને Q બિંદુએ છેદે છે. આથી,

$$RQ = \frac{1}{2}(\text{કેન્દ્રગામી બળ } F) \times (\delta t)^2$$

$$\therefore \quad (\delta t)^2 = \frac{2RQ}{F}$$

પ્રમેય 1 પ્રમાણે δt ક્ષેત્રફળ SPQ ના પ્રમાણસર છે.

આપણે ક્ષેત્રફળ SPQ $\approx$ ક્ષેત્રફળ ΔSPQ લઈએ તો ખૂબ જ નાની ભૂલ રહેશે.

$$\Delta SPQ \text{ ના ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2} QT \times SP = \frac{dA}{dt}\delta t$$

$$\therefore \quad \delta t = \frac{QT \times SP}{2\left(\frac{dA}{dt}\right)}$$

જ્યાં $\frac{dA}{dt}$ ક્ષેત્રફળનો દર દર્શાવે છે.

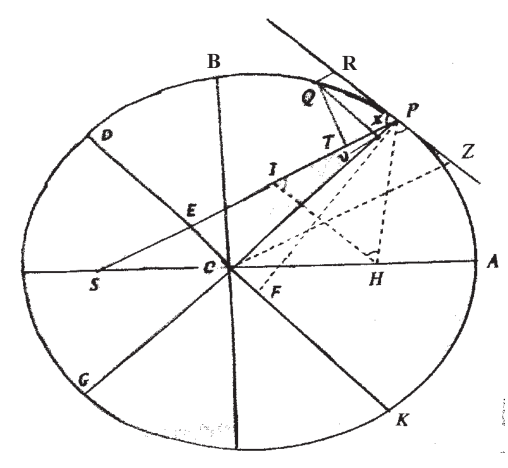
$$\therefore \quad (\delta t)^2 = \frac{1}{4}\frac{(QT)^2 \times (SP)^2}{\left(\frac{dA}{dt}\right)^2} = \frac{2RQ}{F}$$

$$\therefore \quad \text{કેન્દ્રગામી બળ } F = 8\left(\frac{dA}{dt}\right)^2 \frac{QR}{QT^2 \cdot SP^2}$$

પ્રમેય 6 : કેન્દ્રગામી બળ $F \propto \frac{QR}{QT^2 \cdot SP^2}$

ઉપવલયનાં જરૂરી પરિણામો :

આકૃતિ 4માં બતાવ્યા પ્રમાણે ઉપવલય ઉપર નજીકનાં બે P અને Q આપેલાં છે. ઉપવલયનું કેન્દ્ર C અને નાભિઓ S અને H છે. CA અને CB અડધી ધરીઓ છે. P બિંદુએ RPZ સ્પર્શક છે. QR || SP અને Qv // RPZ છે. Qv, SP ને x બિંદુએ છેદે છે. કેન્દ્ર C માંથી પસાર થતા વ્યાસ PCG નો અનુબદ્ધ (Congugate) વ્યાસ DCK છે. વ્યાસ DCK સ્પર્શક RPZ ને સમાતંર છે. વ્યાસ DCK SP ને E માં છેદે છે. QT $\perp$ SP છે. HP જોડો અને IH // RPZ દોરો.



આકૃતિ 4

(1) SP + PH = $2a$ જ્યાં a અક્ષ CA ની લંબાઈ છે.

(2) PE = $\frac{1}{2}$(PS + PI)

CS = HC અને HI // RPZ // DCK

$\therefore$ E SI ના સરખા ભાગ કરે છે, એટલે કે SE = EI.

PE = PS – SE

= PI + IE + ES – SE

= PI + IE = $\frac{1}{2}$(2PI + 2IE)

= $\frac{1}{2}$[PI + IE + ES + PI] = $\frac{1}{2}$[PS + PI]

(3) PS + PI = 2AC

PS + PI = SP + PH = $2a$ = 2AC

(4) PE = a = CA

PE + ES + PI = $2a$

$\therefore$ PE + IE + PI = 2PE = $2a$

$\therefore$ PE = a

(5) $\Delta Pxv \equiv \Delta PCE$

$\angle Pvx = \angle PCE = 90^{o}$ EC // xv

$\therefore$ $\Delta Pxv \equiv \Delta PCE$

$\therefore$ $\frac{Px}{Pv} = \frac{PE}{PC} = \frac{QR}{PV}$

(6) The Latus rectum L = $\frac{2b^2}{a}$

S($-ae$, 0), H(ae, 0) અને $b^2 = (1 - e^2)a^2$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

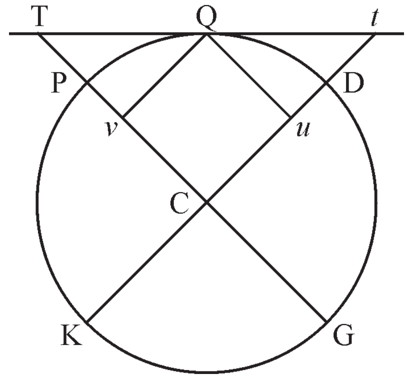
$$\therefore \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{a^2e^2}{a^2} = (1 - e^2)$$

$$\therefore y = \pm b\sqrt{1-e^2}$$

$$\therefore L = 2b\sqrt{1-e^2} = 2b \times \frac{b}{a} = \frac{2b^2}{a}$$

આકૃતિ 5માં ઉપવલય આપેલો છે. કોઈ પણ જગ્યાએ P બિંદુ લઈએ. PCG C માંથી પસાર થતા વ્યાસનો અનુબદ્ધ KCD છે. P અને D વચ્ચે કોઈ પણ જગ્યાએ Q બિંદુ લઈએ. TQt એ Q બિંદુએ ઉપવલયનો સ્પર્શક છે.

Qu // PCG અને Qv // KCD છે.



આકૃતિ 5

(7) $\frac{Cv}{CP} = \frac{CP}{CT}$ $\quad CP^2 = Cv \cdot CT$

(8) $\frac{Cu}{CD} = \frac{CD}{Ct}$ $\quad CD^2 = Cu \cdot Ct$

(9) $\frac{CD^2}{CP^2} = \frac{Cu \cdot Ct}{Cv \cdot CT}$

(10) Δ^S vTQ અને CTt માં

Qv // CD, $\angle vTQ = \angle CTt$

$\therefore \quad \Delta vTQ \equiv \Delta CTt$

$\therefore \quad \frac{Ct}{CT} = \frac{vQ}{vT}$

(11) $\frac{CD^2}{CP^2} = \frac{Cu}{Cv} \cdot \frac{vQ}{vT} = \frac{vQ}{cv} . \frac{vQ}{vT} = \frac{vQ^2}{cv \times vT}$

(12) $Cv \times vT = Cv \times (CT - cv)$

$= CP^2 - Cv^2$

$= (CP - Cv)(CP + Cv)$

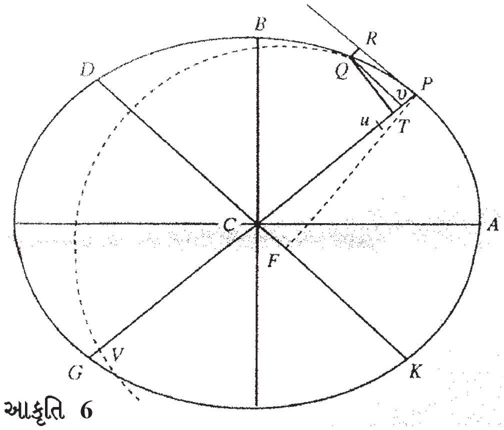
$= Pv \times vG$

(13) $\frac{CD^2}{CP^2} = \frac{Qv^2}{cv \times vT} = \frac{Qv^2}{Pv \times Gv}$ અથવા $\frac{CP^2}{CD^2} = \frac{Pv \times Gv}{Qv^2}$

પ્રમેય 10 : If a body revolves in an ellipe, it is proposed to find the law of the centripetal force tending to the center of the ellipse.

જે કોઈ પદાર્થ ઉપવલયી ભ્રમણકક્ષામાં ફરતો હોય, તો તેને લાગતા કેન્દ્રગામી બળ જેનું કેન્દ્ર ઉપવલયનું કેન્દ્ર હોય તેવા કેન્દ્રગામી બળ શોધવાની દરખાસ્ત છે.

આકૃતિ 6માં ઉપવલય આપેલો છે જેનું કેન્દ્ર C છે અને તેની અડધી ધરીઓ CA અને CB છે. P અને Q એકદમ નજીકનાં બે બિંદુઓ આ ઉપવલય ઉપર છે. P બિંદુએ સ્પર્શક PR છે અને PCG વ્યાસ છે અને તેનો અનુબદ્ધ (Conjugate) વ્યાસ DCK છે. જે સ્પર્શક RP ને સમાંતર છે. PF, DCK ને લંબ છે અને Q માંથી QT અને QR, CP ને લંબ અને સમાંતર છે. Qv // RP છે.



આકૃતિ 6

આપણે પ્રમેય 6 માં સાબિત કર્યું કે કોઈ પણ ભ્રમણકક્ષાને ઊભું કરનાર કેન્દ્રગામી બળ $\frac{QR}{QT^2 \times SP^2}$ ના પ્રમાણસર છે. આનો ઉપયોગ કરીને ઉપવલયી ભ્રમણકક્ષામાં ફરતા પદાર્થ ઉપર લાગતા કેન્દ્રગામી બળ જેનું કેન્દ્ર ઉપવલયનું કેન્દ્ર હોય તેવા બળનું સૂત્ર મેળવીએ.

આપણે ઉપવલયના ગુણધર્મોમાં મેળવેલા સૂત્ર (13)

$\frac{CP^2}{CD^2} = \frac{Pv \times Gv}{Qv^2}$ નો ઉપયોગ કરીને કેન્દ્રગામી બળનું સ્વરૂપ મેળવીએ.

ΔQvT અને ΔCPF માં

Qv // CF

$\angle QvT = \angle TCF$ (Alt.)

$\angle PFC = \angle QTv = 90^o$

$\therefore \quad \Delta QvT \equiv \Delta CPF$

$\therefore \quad \frac{Qv}{QT} = \frac{CP}{PF}$ હોઈને $\frac{Qv^2}{QT^2} = \frac{CP^2}{PF^2}$ થાય.

$\therefore \quad Qv^2 = \frac{QT^2 \times CP^2}{PF^2}$. આ કિંમત (13)માં મૂકતાં,

$\frac{Pv \times Gv}{QT^2 \times CP^2} \times PF^2 = \frac{CP^2}{CD^2}$ મળે.

Q R Pv સમાંતર ચતુષ્કોણ હોઈને QR = Pv અને Qv = RP.

VG ≈ GP = 2CP. આનો ઉપયોગ ઉપરના સમીકરણમાં કરતાં,

$\frac{QR \times 2CP}{QT^2} = \frac{CP^4}{PF^2 \times CD^2}$.

P, D, G અને K બિંદુઓએ સ્પર્શકો દોરવાથી લંબચોરસ મળશે. DK આ લંબચોરસના સરખા ભાગ કરે છે. આથી તેમનાં ક્ષેત્રફળો સરખાં થશે. ઉપરના લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ બે રીતે મળે.

$\therefore \quad PF^2 \times CD^2 = CA^2 \times CB^2$

કેન્દ્રગામી બળ $\propto \frac{QR}{QT^2 . CP^2}$ છે અને $\frac{QR}{QT^2 . CP^2} = \frac{1}{2} \frac{CP}{CA^2 \times CB^2}$ છે.

ઉપવલયમાં CA અને CB અચળ હોઈને કેન્દ્રગામી બળ $\propto$ CP છે.

જો ભ્રમણકક્ષા ઉપવલયી હોય તો કેન્દ્રગામી બળ જે પદાર્થને લાગે છે તે ઉપવલયના કેન્દ્રથી પદાર્થના અંતર ઉપર આધારિત છે.

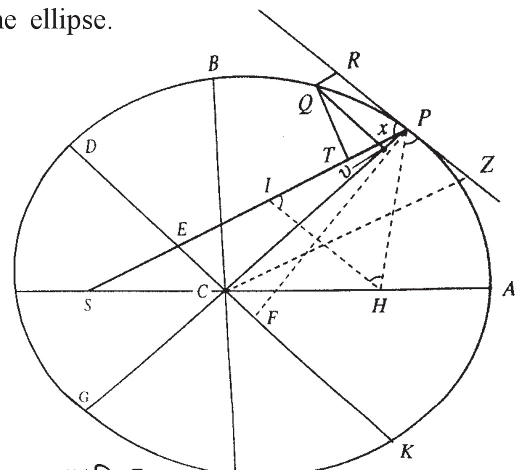
ઉપવલય ગતિમાર્ગ માટે જવાબદાર બળ

આપણે પ્રમેય X માં ઉપવલયના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતા કેન્દ્રગામી બળ મેળવ્યું જે પદાર્થના કેન્દ્રથી અંતર ઉપર આધાર રાખે છે. હવે જો આપણે કેન્દ્રગામી બળ ઉપવલયના કેન્દ્રમાંથી પસાર થવાના બદલે નાભિમાંથી પસાર થતું હોય તો તે કેન્દ્રગામી બળનું સૂત્ર કેવું હશે તે જોઈએ. આ અગત્યનું પરિણામ છે જે પ્રમેય 6નો અને ઉપવલયના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરીને મેળવેલું છે.

પ્રમેય XI : If a body revolves in a ellipse; it is required to find the law of the centripetal force tending to the focus of the ellipse.

જો કોઈ પદાર્થ ઉપવલયી ભ્રમણકક્ષામાં ફરતો હોય, તો તેને લાગતા કેન્દ્રગામી બળ જેનો ઉપવલયના નાભિ તરફ ઝોક હોય તેનું સમીકરણ મેળવવું છે.

આકૃતિ 7માં બતાવ્યા પ્રમાણે ઉપવલયનાં બે નજીકનાં બિંદુઓ P અને Q આપેલાં છે. ઉપવલયનું કેન્દ્ર C અને નાભિઓ S અને H છે. CA અને CB અર્ધ ધરીઓ છે. P બિંદુએ RPZ સ્પર્શક છે અને કેન્દ્ર C માંથી પસાર થતો PCG વ્યાસ છે અને આ વ્યાસને અનુબદ્ધ વ્યાસ DCK છે. વ્યાસ DCK, RPZ ને સમાંતર છે. QT, SP ને લંબ છે. Qv, RPZ ને સમાંતર છે જે CP ને v બિંદુએ અને SP ને x બિંદુએ છેદે છે. HI, RPZ ને સમાંતર છે.



આકૃતિ 7

આપણે જાણીએ છીએ કે કેન્દ્રગામી બળ $\frac{QR}{SP^2 \times QT^2}$ ના પ્રમાણસર છે. આપણે $\frac{QR}{SP^2 \times QT^2}$ ની કિંમત મેળવવાની છે. આના માટે આપણે $\frac{PvG}{Qv^2} = \frac{CP^2}{CD}$ નો ઉપયોગ કરીએ.

ΔPxv અને ΔPEC માં

$\angle PCE = \angle xvP = 90^o$

EC // vx, $\angle Pxv = \angle PEC$ (Corresponding)

$\therefore \quad \Delta Pxv \equiv \Delta PEC$

$\therefore \quad \frac{Px}{Pv} = \frac{PE}{PC}$

QRPx સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોઈને Px = QR અને PE = AC જે (4)માં સાબિત કર્યું છે.

$\therefore \quad \frac{QR}{Pv} = \frac{AC}{PC}$ (a)

$\frac{Pv}{Qv^2} = \frac{CP^2}{CD^2} \cdot \frac{1}{vG}$ (b) (13)માંથી

(a) અને (b) નો ગુણાકાર કરતાં,

$$\frac{QR}{Qv^2} = \frac{AC \times PC}{CD^2 \times VG} \qquad (c)$$

ΔQxT અને ΔPEF માં

$\angle QTx = \angle PFE = 90^o$

$Qx \parallel RPZ \parallel DCK$

$\therefore \quad \angle QxT = \angle PEF$ (Alternate)

$\therefore \quad \Delta QxT \equiv \Delta PEF$

$$\therefore \quad \frac{Qx}{QT} = \frac{PE}{PF} = \frac{AC}{PF}$$

$$\therefore \quad \frac{Qx^2}{QT^2} = \frac{AC^2}{PF^2}$$

આપણે જાણીએ છીએ કે $PF^2 \times CD^2 = CA^2 \times CB^2$

$$\therefore \quad \frac{CA^2}{PF^2} = \frac{CD^2}{CB^2}$$

$$\therefore \quad \frac{Qx^2}{QT^2} = \frac{CD^2}{CB^2} = \frac{Qv^2}{QT^2} \quad (d) \quad (Qv \approx Qx)$$

(c) અને (d)નો ગુણાકાર કરતાં,

$$\frac{QR}{QT^2} = \frac{AC \times PC}{CD^2 \times VG} \times \frac{CD^2}{CB^2} = \frac{AC \times PC}{CB^2 \times VG}$$

Latuo rectum $L = \frac{2b^2}{a} = \frac{2CB^2}{CA}$ (6)માંથી

$$\therefore \quad \frac{QR}{QT^2} = \frac{2}{L}\frac{PC}{VG} \qquad VG \approx 2PC \text{ હોઈને}$$

$$\frac{QR}{QT^2} \times \frac{1}{SP^2} = \frac{1}{L} \times \frac{1}{SP^2}$$

$\therefore$ કેન્દ્રગામી બળ $\propto \frac{1}{SP^2}$

જે આકર્ષણનો વ્યસ્ત-વર્ગનો નિયમ છે.

આ લેખ નીચેનાં પુસ્તકોના આધારે લખાયો છે :

(1) Chandrasekhar S. Newton's Principia for the Common Reader. Oxford Clarendon Press, 1995.

(2) Cohen I. A Guide to Newton's Principia. Berkeley, University of California Press, 1999.

(3) Colin Pask. Magnificient Principia, Prometheus Books, New York, 2019

– વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ 'સ્વરાજ'

નરસિંહજીના મંદિર પાસે, ઉવારસદ રોડ, શેરથા Mo. : 94280 19042