આર્યભટ અને સાઈન (*sine*)નું ટેબલ

વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ

મને ઘણી વખતે થતું કે ભારતનું ગણિતમાં યોગદાન કેટલું? જરૂરથી આપણે હાલમાં 0, 1,..., 9 વાપરીએ છીએ અને આ સંખ્યાઓને ક્યાં રાખીએ છીએ તેના ઉપરથી તેની કિંમત નક્કી થાય છે. જેમ કે, 001 અને 100માં ઘણો ફરક છે. 1 એક અને સો એમ બે કિંમતો છે. સંખ્યાઓના ગુણાકાર, ભાગાકાર, સરવાળા અને બાદબાકી પણ ભારતે આપેલાં. આથી વિશેષ શું? આર્યભટે અને કેરાલાની ગણિત અને ખગોળશાસ્ત્રી સ્કૂલે દુનિયાને ઘણું બધું આપ્યું છે. આ લેખમાં આપણા જાણીતા ખગોળશાસ્ત્રી આર્યભટ્ટે ગણિતમાં આપેલા યોગદાનની વાત કરીશું.

આર્યભટ (Arybhata) જ બધે (અંગ્રેજીમાં) લખાય છે; આર્યભટ્ટ નહિ. આર્યભટના જીવન વિશે ખાસ માહિતી પ્રાપ્ત નથી. તેમનો જન્મ ઈ.સ. 476માં અસ્માકા (Asmaka)માં થયેલો. તેમની જન્મભૂમિ અસ્માકા ક્યાં આવેલી છે તે માટે ઘણાં અનુમાનો છે. અસ્માકા દક્ષિણનાં રાજ્યો કેરાલા, તમિલનાડુ કે આન્ધ્રપ્રદેશમાં આવેલું હોય કે ઉત્તરપૂર્વનાં રાજ્યો બિહાર કે બંગાલમાં આવેલું હોય. પણ તેમણે બિહારમાં પટણાની નજીક આવેલા કુસુમપુરમાં ગ્રંથો લખેલા.

તે સમયે કુસુમપુર ગુપ્ત સામ્રાજ્યની રાજધાનીનું શહેર હતું. તદ્ઉપરાંત કુસુમપુર ઘણી સદીઓથી કેળવણીનું કેન્દ્ર પણ હતું. વિક્રમ સંવત ૪થી સદીના ખૂબ જ જાણીતા જૈન વૈજ્ઞાનિક ઉમાસ્વતિએ નોંધેલું કે કુસુમપુરમાં આર્યભટના સમય પહેલાં ગણિત અને ખગોળશાસ્ત્રની ખૂબ જ પ્રસિદ્ધ સ્કૂલ હતી. ભાસ્કર Iનાં ઈ.સ. 629ની આસપાસનાં પુસ્તકો ઉપરથી કહી શકાય કે આર્યભટ મગધમાં આવેલી યુનિવર્સિટીના કુલપતિ હતા. તે સમયે આર્યભટે ઓછામાં ઓછાં બે પુસ્તકો લખેલાં. આર્યભટિય અને આર્યભટ-સિદ્ધાંત. આર્યભટિય ગણિત અને ખગોળશાસ્ત્રનું પુસ્તક છે. આર્યભટિય નામ આર્યભટે આપેલું લાગતું નથી; આર્યભટિયના વિવેચકોએ એ નામ આપ્યું છે. હાલમાં આર્યભટિયનું અંગ્રેજી ભાષાંતર વિવેચન સાથે ઇન્ટરનેટ ઉપરથી સરળતાથી મળી શકે છે. કે. એસ. શુક્લ અને કે. વી. શર્માનું લખેલું આ પુસ્તક ઇન્ટરનેટ ઉપરથી મેળવીને આ લેખ લખવામાં ઉપયોગ કર્યો છે.

આર્યભટિયના ચાર મુખ્ય વિભાગો છે :

(1) ગિતિકા (Gitika) : આ વિભાગમાં 13 શ્લોકો છે. નંબર લખવાની રીત, શૂન્ય, ગ્રહોની ગતિ, પૃથ્વીની ગતિ વગેરે શ્લોકોથી દર્શાવી છે. સાથે સાથે *sine* નું ટેબલ પણ એક જ શ્લોકથી દર્શાવ્યું છે જે આપણે થોડાક વખતમાં જોઈશું.

(2) ગણિત (Ganit) : આ વિભાગમાં 33 શ્લોકો છે. ગણિત માટે જ આ વિભાગ છે. જેમાં વર્ગ, વર્ગમૂળ, ઘન, ઘનમૂળ, વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ, ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ, સમલંબકનું (Trapezium) ક્ષેત્રફળ, ગોળાના કદ વગેરે આપ્યું છે. સમાંતર શ્રેઢી, સમગુણોત્તર શ્રેઢી, Σn^2 અને Σn^3 ના વગેરેના સરવાળા પણ આપ્યા છે.

(3) કાળક્રિયા (Kalkriya) : આ વિભાગના 25 શ્લોકો છે. આપેલા ગમે તે દિવસે અને સમયે ગ્રહોની અવસ્થા મેળવવાની રીત આપી છે. સમયના જુદા જુદા એકમો પણ આપ્યા છે. ગ્રહોનાં અંતરો અને ગતિઓ કાળક્રિયા વિભાગમાં આપ્યાં છે.

(4) ગોળ (Gola) : આ વિભાગમાં 50 શ્લોકો છે. આ વિભાગના ત્રણ મુખ્ય ભાગ છે : ભૂગોળ (Bhugola), ખગોળ (Khagola) અને ગોળાકાર ખગોળશાસ્ત્ર (Spherical Astronomy). ગોળાકાર ખગોળના પણ ચાર વિભાગો છે. રાત્રી અને દિવસનાં કારણો, પૃથ્વીનો આકાર, વિષુવવૃત્ત વગેરે. તેમજ ચંદ્ર અને ગ્રહોની ગતિ, સૂર્યગ્રહણ અને ચંદ્રગ્રહણ વગેરે.

આર્યભટિયમાં 108 શ્લોકો છે. આ શ્લોકો એવી રીતે લખાયા છે કે જેથી જટિલ તંત્ર રચનાને યાદ રાખવામાં સરળતા પડે. આ શ્લોકો ટૂંકા અને ચોટદાર શૈલીવાળા હોઈને તેને સમજાવવા માટે વિવરણકારની (commentator) જરૂર ખરી. આર્યભટિયના વિવરણકારો ભાસ્કર I (600 A.D.) અને નિલકંઠ સોમયાજી (1465 A.D.) હતા. આ વિવરણોમાંથી આપણને ગ્રંથો, ગ્રંથોના લેખકો અને તે સમયના ઇતિહાસની ખબર પડે.

π ની અંદાજે કિંમત :

આર્યભટે π ની અંદાજે કિંમત મેળવવા પ્રયત્ન કરેલો. આર્યભટિયમાં ગણિત વિભાગમાં દશમો શ્લોક :

चतुरधिकं शतमष्टगुणं द्वाषष्टिस्तथा सहस्त्राणाम्।

अयुतद्वयविष्कम्भस्यासन्नो वृत्तपरिरणाहः ॥

100માં 4 ઉમેરો, 8 વડે ગુણાકાર કરો અને પછી 62,000 ઉમેરો. આ 20,000 વ્યાસના વર્તુળનો પરિઘ છે.

$\pi \times 20{,}000 = (100 + 4)\,8 + 62{,}000 = 832 + 62{,}000$

$\therefore \quad \pi = \frac{62832}{20000} = 3.1416$

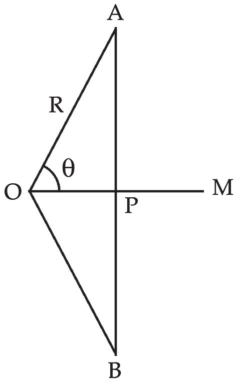
શા માટે આ કામ કરે છે તેની કોઈ પણ નોંધ નથી. $\frac{21600}{6.2832}$

આર્યભટનું સાઇન (*sine*) નું ટેબલ :

આપણે જે રીતે ટેબલને સમજીએ છીએ તે રીતનું આ ટેબલ નથી. આ ટેબલમાં રૉ અને કૉલમ નથી. યાદ રાખી શકાય તેવો એક મઝાનો શ્લોક છે. આ શ્લોક ઉપર ઘણું બધું લખાયું છે.

અહીંયાં AMB વર્તુળની ચાપ છે અને વર્તુળનાં બે બિંદુઓ A અને B ને જોડતી રેખા AB વર્તુળની જીવા છે. OA વર્તુળની ત્રિજ્યા છે જેની કિંમત R છે. $\angle AOM = \theta$ છે અને જ્યાં $(\theta) = AP$ લઈએ.

જ્યાં $(\theta) = AP = R\,sin\theta$



આ ભારતીય અને હાલમાં વપરાતી $sin\theta$ ને જોડતી ફૉર્મ્યુલા છે.

મિનિટમાં વર્તુળના પરિઘ = 360 × 60 = 21,600 મિનિટ થાય.

આપણે આર્યભટની π ની કિંમત 3.1416 જોઈ.

$\therefore \quad 2\pi R = 21{,}600$

$\therefore \quad R = \qquad = 3437.93 = 3438$

$\therefore$ જ્યાં, $(\theta) = 3438\ sin\theta$

આર્યભટ 0° થી 90° ના 24 ભાગ કરે છે. દરેક ભાગ $\frac{90}{24} = 3^o\,45' = 225'$ થાય.

પહેલા વિભાગ ત્રિટિકામાં શ્લોક 12 R $sin\theta$ નો તફાવત આપે છે.

मखि भखि फखि धखि णखि ञखि

ङखि हक्स स्ककि किष्ग श्घकि किघ्व ।

घ्लकि किग्र हक्य धकिकिच

स्ग झश ङ्व क्ल प्त फ छ कलार्धज्याः ।

આ સંસ્કૃતના શ્લોકોમાં સાંકેતિક લિપિમાં લખેલા નંબરો આર્યભટ્ટિયમાં સમજાવેલી સંખ્યાઓની રૂપરેખાનો ઉપયોગ કરીને પ્રચલિત ભાષામાં ફેરવી શકાય છે.

225, 224, 222, 219, 215, 210, 205, 199, 193, 183, 174, 164, 154, 143, 131, 119, 106, 93, 79, 65, 51, 37, 22 અને 7 – આ R $sin\theta$ તફાવત મિનિટમાં છે. આ તફાવતને આપણે d_1, d_2,..., d_{24} થી દર્શાવીએ અને તેમના સરવાળાને $S_1 = d_1$, $S_2 = d_1 + d_2 = S_1 + d_2$, $S_3 = S_2 + d_3$, $S_4 = S_3 + d_4$... અને $S_{24} = S_{23} + d_{24}$ દર્શાવીએ.

ટેબલ 1માં ચોથા કૉલમમાં d_n ની કિંમતો આપી છે. આ કિંમતો ધીરે ધીરે ઘટતી જાય છે. ટેબલ 1માં પાંચમા કૉલમમાં S_n ની કિંમતો આપી છે. $S_1 = d_1 = 225 = 3438$ $sin\ 3^o\ 10'$ થાય. $S_2 = S_1 + d_2 = 225 + 224 = 449 = 3438$ $sin\ 7^o\ 30'$ થાય. જો આપણે $sin\ 7^o\ 30'$ ની કિંમત જોઈતી હોય, તો

$sin\ 7^o\ 30'$ = = 0.13059 મળે. કેલક્યુલેટરનો ઉપયોગ કરીને $sin\ 7^o\ 30'$ની કિંમત ૦.૧૩૦૫૨ મળે. આ બંને કિંમતોના પહેલા ચાર નંબરો સરખા જ છે. આર્યભટે મિનિટમાં ફેરવીને, ખૂબ જ સરળતાથી એક શ્લોકમાંથી આખું ટેબલ તૈયાર કરી શકાય તે તો આર્યભટ જ જોઈ શકે !! આ શ્લોક આર્યભટ લાવ્યા ક્યાંથી ? આનો જવાબ આર્યભટ્ટિયના વિભાગ 2 ગણિતવિભાગના 12મા શ્લોકમાં છે.

प्रथमाच्चापज्यार्धाद्यैरूनं खण्डितं द्वितीयार्धम् ।

तत्प्रथमज्यार्धांशैस्तै रूनानि शेषाणि ॥

આ શ્લોક ચોથા કૉલમમાં બતાવેલા d_1, d_2,..., d_{24} મેળવવા તે બતાવે છે.

પહેલા d_1 ને તેની જાતે જ ભાગતાં જે ભાગાકારનું ફળ 1 મળે તે d_1 માંથી બાદ કરતાં બીજો R_2 કે d_2 મળે. $(d_1 + d_2)$ના સરવાળાને d_1 વડે ભાગતાં જે ફળ મળે તે d_2 માંથી બાદ કરતાં d_3 મળે.

$d_2 = d_1 -$ $= d_1 - 1 = 224$

$d_3 = d_2 -$ $= 224 -$ $\cong 224 - 2 = 222$

$d_4 = d_3 -$ $\cong 222 - 3 = 219$

$d_5 = d_4 -$ $\cong 219 - 4 = 215$

આ જ રીતે d_{24} સુધી બાકીના તફાવતો મેળવી શકાય.

ટેબલ 1

n	(A) ખૂણો (અંશ, મિનિટમાં)	R*sine* તફાવત આર્યભટની ભાષામાં	R*sine* તફાવત આંકડાઓમાં d_n	R*sine* જ્યાં (A)ની કિંમત S_n	*sin*(A) =	કેલ્ક્યુલેટરથી મેળવેલી S(A)
1	03° 45’	मखि	225’	225’	0.0654	0.06540
2	07° 30’	भखि	224’	449’	0.13059	0.13052
3	11° 15’	फखि	222’	671’	0.195	0.19509
4	15° 00’	धखि	219’	890’	0.25887	0.25881
5	18° 45’	णखि	215’	1105’	0.32140	0.32144
6	22° 30’	ऋखि	210’	1315’	0.38249	0.38268
7	26° 15’	ङखि	205’	1520’	0.44212	0.44229
8	30° 00’	हस्श	199’	1719’	0.5	0.5
9	33° 45’	स्ककि	191’	1910’	0.55535	0.55557
10	37° 30’	किष्ग	183’	2093’	0.60878	0.60876
11	41° 15’	श्धकि	174’	$\frac{S_n}{3438}$ 2267’	0.65939	0.65937
12	45° 00’	किध्व	164’	2431’	0.70710	0.707107
13	48° 45’	ध्लकि	154’	2585’	0.75189	0.75184
14	52° 30’	किग्र	143’	2728’	0.79348	0.79335
15	56° 15’	हक्ये	131’	2859’	0.83159	0.83147
16	60° 00’	धकि	119’	2978’	0.86620	0.866025
17	63° 45’	किच	106’	3084’	0.89703	0.89687
18	67° 30’	स्ग	93’	3177’	0.92408	0.92388
19	71° 15’	झश	79’	3256’	0.94706	0.94693
20	75° 00’	ङ्व	65’	3321’	0.96597	0.96592
21	78° 45’	क्ल	51’	3372’	0.98080	0.98078
22	82° 30’	प्त	37’	3409’	0.99156	0.99144
23	86° 15’	फ	22’	3431’	0.99796	0.99786
24	90° 00’	छ	7’	3438’	1	1

ભાસ્કર I નું *sine* ની કિંમતનું સૂત્ર :

ભાસ્કર I એ તેમના પુસ્તક મહાભાસ્કરિયમાં *sine* ની કિંમતો મેળવવા માટે સૂત્રો આપ્યાં છે :

x અંશમાં માપવામાં આવે તો, $sinx$ =

જ્યાં, $0 \leq x \leq 180^o$ છે. x રેડીઅનમાં માપવામાં આવે તો, $sinx = \frac{16x(\pi \quad x)}{[5\pi^2 \quad 4x(\pi \quad x]}$

ભાસ્કર I આ સૂત્રો આર્યભટના કારણે છે તેમ કહે છે પણ આવાં સૂત્રો આર્યભટિયમાં નથી.

ટેબલ 2

અંશ	$\frac{4x(180 \quad x)}{[40500 \quad x(180 \quad x]}$	*sinx*	તફાવત
0°	0	0	0
1	0.01776	0.01745	0.00031
5	0.08833	0.08715	0.00118
10	0.17525	0.17365	0.00160
20	0.34316	0.34202	0.00114
30	0.5	0.5	0
40	0.64183	0.64279	−0.00096
50	0.76470	0.76604	−0.00134
60	0.86486	0.86602	−0.00116
70	0.93902	0.93969	−0.00067
80	0.98461	0.98480	−0.00019
90	1.0	1.0	0

$$\frac{4x(180 \quad x)}{[40500 \quad x(180 \quad x]}$$

ભાસ્કરનું *sinx* નું સૂત્ર સાદું, મનોહર અને વ્યયહારિક હેતુ માટે જોઈતી ચોક્કસ કિંમતો આપે છે.

આર્યભટ્ટનું *sine* ટેબલ પ્રાચીન ભારતમાં નમૂનારૂપ ગણાતું. તેને સુધારવાનો સતત પ્રયત્ન ચાલુ જ રહેલો. અને આ સુધારા કરવાના સતત પ્રયત્નના કારણે માધવ *sine* અને *cosine* ની ઘાત શ્રેઢીઓ મેળવી શકેલા.

આ લેખ નીચેનાં પુસ્તકોના આધારે લખ્યો છે :

(1) Shukla, K. S. (1976), Aryabhatia of Aryabhata, Indian National Science Academy, New Delhi

(2) Joseph, G. G. (2011), The Crest of the Peacock : Non-European Roots of Mathematics, Princeton University Press, Princeton & Oxford.

(3) Joseph, G. G. (2016), Indian Mathematics : Engaging with the world from Ancient to Modern Times, World Scientific.

વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ

'સ્વરાજ', નરસિંહજીના મંદિરા પાસે, ઉવારસદ રોડ, મુ.પો. શેરથા, તા. જિ. ગાંધીનગર-૩૮૨૪૨૩

મો. ૯૪૨૮૦૧૯૦૪૨