જૉહ્‌ન નૅશ (John Nash)

વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ

પ્રાસ્તાવિક

ગણિતના અગત્યના કામ માટે નૉર્વેમાં દર વર્ષે યુરોપિયન ડૉલર ૭૫૦,૦૦૦નું ઇનામ જાન્યુઆરી, ૨૦૦૨થી નૉર્વેના પ્રસિદ્ધ ગણિતશાસ્ત્રી આબેલના (Abl) નામે અપાય છે. ૨૦૧૫નું ઇનામ બે અમેરિકાના ગણિતશાસ્ત્રીઓ જોહ્‌ન નૅશ અને લુઈસ નિરેનબર્ગને (Louis Nirenberg) મે ૧૯ના રોજ ઑસ્લોમાં (Oslo) નૉર્વેના રાજાના હસ્તક ભવ્ય સમારંભમાં અપાયું. આ સમારંભમાંથી પાછા આવતાં મે ૨૩, ૨૦૧૫ના રોજ ન્યૂ જર્સી (New Jersey) રાજ્યમાં એરપૉર્ટથી ઘેર જતાં ભાડાની ગાડીને અકસ્માત થતાં જોહ્‌ન અને ઍલિસિયા (Alicia) નૅશ બંનેનું નિધન થયું.

સિનેમાના અભિનેતા જેવો દેખાવડો અને ભવ્ય રીતભાતવાળો વેસ્ટ વિર્જિનિયન ૧૯૪૮માં ગણિતક્ષેત્રમાં કૂદી પડે છે. ફક્ત એક જ લીટીના લખાણવાળા ભલામણપત્ર જેમાં લખેલું હતું. ''આ માણસ અલૌકિક બુદ્ધિવાળો છે. (This Man is Genius)'' આ ભલામણપત્રથી પ્રિન્સટનના પ્રખર ગણિતવિભાગમાં આવી પહોંચે છે. આવ્યા પછી ફક્ત દોઢ જ વર્ષમાં એકવીસ વર્ષની વયે સત્તાવીસ જ પાનાની થીસિસ લખીને Ph.D. થાય છે. આ થીસિસના કામના કારણે એક દિવસ નૉબલ પ્રાઇઝ મેળવે છે.

આ પછીના દાયકામાં ગણિતના વણઉકલ્યા સવાલોના ઉકેલો મેળવીને ગણિતના ક્ષેત્રમાં તેની ગણિતશાસ્ત્રી તરીકે ગણના થવા મંડી. ગણિતશાસ્ત્રી ડોનાલ્ડ ન્યુમેન (Donald Newmann), જે નૅશને સારી રીતે ઓળખતા તે કહેતા કે, ''ખરાબ છોકરો છે, પણ મહત્ત્વનો છે.'' નૅશ જ્યારે ત્રીસ વર્ષના થવા આવ્યા ત્યારે ચારે બાજુએ બધું સરસ દેખાતું. એમઆઈટીમાં (MIT, Massachuasetts Institute of Technology) પ્રોફેસર બનવાની તૈયારી, ભૌતિકશાસ્ત્રી સુંદર પત્ની અને ફૉર્ચ્યુન (Fortune) માસિકે નવી જુવાન ગણિતશાસ્ત્રીઓની પેઢીના એક મહત્ત્વના ગણિતશાસ્ત્રી તરીકે તેમની ગણના કરેલી. એક જ વર્ષમાં તેજસ્વી કારકિર્દીના ભુક્કા બોલી ગયા. તેમણે માનસિક સ્થિરતા ગુમાવી. અંગ્રેજીમાં તેને 'પેરેનૉઇડ સ્કિઝોફ્રેનિઆ (Paranoid Schizophrenia)'ના રોગ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. આ રોગના કારણે તેમણે એમઆઈટીમાંથી રાજીનામું આપ્યું. આદર્શવાદી પણ અવ્યવહારુ રીતે દુનિયાના નાગરિક ગણાવવા માટે પૅરિસ ભાગી ગયા. લગભગ પંદરેક વર્ષ માનસિક રોગોની હૉસ્પિટલમાં (Psychiatric Hospital) આવ-જા કરી. ચાલીસ વર્ષે બધું જ ખોયું : મિત્રો, કુટુંબીઓ, વ્યવસાય. તેમની પત્ની ઍલિસિયાની કરુણાના કારણે ઘર વિનાના બનતાં રહી ગયા. વફાદાર ઍલિસિયા અને વફાદાર મિત્રોએ તેમને બચાવ્યા.

જ્યારે નૅશ બેહાલ હાલતમાં હતા ત્યારે પણ તેમનું નામ જુદાં-જુદાં ક્ષેત્રોનાં માસિકો અને પુસ્તકોમાં આવ્યા કરતું. નૅશ ઇક્વિલિબ્રિયમ (Nash Equilbrium) નૅશ બારગેઈનિંગ (Nash Bargaining), નૅશ પ્રોગ્રામ (Nash Program), નૅશ એમ્બેડિંગ (Nash Embedding), નૅશ-મોશર થેરમ (Nash Mosher Theoram), નૅશ બ્લોઇન્ગ અપ (Nash Bloing Up) વગેરે અર્થશાસ્ત્રમાં, વનસ્પતિશાસ્ત્રમાં, જીવવિદ્યામાં, ગણિતશાસ્ત્રમાં વગેરેમાં આવ્યા જ કરતાં. પ્રિન્સટન બહાર જે નૅશના પરિણામોનો ઉપયોગ કરતા તે ઘણી વખત એમ માનતા કે નૅશનું નિધન થયું છે.

ગણિતના બે વણઉકલ્યા પ્રશ્નોના નૅશના ઉકેલોએ અને ઉકેલો મેળવવાની રીતોએ નવા વિકાસના રસ્તાઓ ખુલ્લા કર્યા. રિમાન્નિયન મેનીફોલ્ડનું (Riemannian

Manifold) યુક્લિડની જગ્યામાં (Euclid Space) બેસાડવાનું (Embed) પ્રમેય તેમણે મેળવ્યું. પ્રવાહી વિજ્ઞાનમાં રગડા જેવા, દબાણની અસર થાય તેવા અને ગરમી વહી શકે તેવા પ્રવાહીઓના ગતિનાં સમીકરણોના પાયાના ઉકેલોની અસ્તિત્વતા (Existence), અજોડતા (Uniqueness) અને સતતતાનાં (Continuity) પ્રમેયો મેળવ્યાં.

૧૯૮૦ની આસપાસ અર્થશાસ્ત્રમાં દાવપેચના નિયમો (Game Theory) ચોમેર ફેલાયા અને અર્થશાસ્ત્રમાં પ્રાયોગિક અર્થશાસ્ત્ર (Experimental Economics) શરૂ થયું. દાવપેચના નિયમોના આધારે તેલના કૂવાઓથી માંડીને રેડિયો ચલાવવા માટેની હરાજીઓ સરકારો કરાવે છે. વ્યાપાર કૉલેજોમાં પણ દાવપેચના નિયમો વહીવટી કારભારની તાલીમનો ભાગ છે.

૧૯૭૦ પછી ધીરે ધીરે નૅશ સામાન્ય માણસ જેવા થતા ગયા. ૧૯૮૫ પછી તેમનું એકેડેમિક (Academic) કામ શરૂ થયું. તેમની આ માંદગી સામેની ભારે જહેમત અને ધીમે ધીમે સાજા થવાની પ્રક્રિયા સીલ્વિઆ નાસર (Syliva Nasar) કૃત તેમના જીવનચરિત્ર 'A Beautiful Mind'નો પાયો છે. આ જીવનચરિત્ર ન્યૂયૉર્ક ટાઇમ્સના (Best Seller) બેસ્ટ સેલરના લિસ્ટમાં ઘણો વખત રહ્યું. આ પુસ્તકના આધારે 'A Beautiful Mind' નામની ફિલ્મ પણ બની જેને ઑસ્કર ઍવૉર્ડ પણ મળેલો.

બાળપણ અને યુવાવસ્થા

નૅશનો જન્મ જૂન ૧૩, ૧૯૨૮માં અમેરિકામાં આવેલા વેસ્ટ વિર્જિનિયા (West Virginia) રાજ્યના બ્લ્યુફિલ્ડ (Bluefield) ગામમાં થયેલો. તેમના પિતા જૉહ્ન ફૉર્બસ નૅશ સી. (Sr.) ઍપ્પાલચિઅન ઇલેક્ટ્રિક પાવર કંપનીમાં (Appalachian Electric Powar Company) ઇલેક્ટ્રિક એન્જિનિયર હતા અને તેમનાં માતા માર્ગરેટ વિર્જિનિઆ (Margarat Virginia) નૅશ લગ્ન પહેલાં શિક્ષિકા હતાં અને તેમણે યુનિવર્સિટી ઑફ વેસ્ટ વિર્જિનિયામાં અભ્યાસ કરેલો. દરેક દેશોમાં વ્યક્તિ નામોમાં નવી નવી પ્રથા હોય છે. અહીંયાં જૉહ્ન ફ. નૅશ બાપ અને બેટાનાં એક સરખાં નામ છે, પણ બંનેને જુદા પાડવા માટે નામના છેડે જુ. (Jr.) અને સિ. (Sr.) લખાય છે. જુનિયરનું (Junior) ટૂંકું સ્વરૂપ જુ (Jr.) અને સિનિયરનું (Senior) ટૂંકું સ્વરૂપ સિ. (Sr.) વપરાય છે. બેટા માટે જુ. (Jr.) અને બાપા માટે સિ (Sr.) વપરાય છે. નૅશ સિ. ટેક્સાસ એ. ઍન્ડ એમ. યુનિવર્સિટીમાંથી (Texas A. & M.) ઇલેક્ટ્રિકલ એન્જિનિયર બનેલા. નૅશ જુ.ના જન્મ પછી અઢી વર્ષે તેમની બહેન માર્થાનો (Martha) જન્મ થયેલો.

જ્યારે નૅશ હાઈસ્કૂલમાં હતા ત્યારે તેમણે ઈ. ટી. બેલનું (E. T. Bell) જાણીતું પુસ્તક 'મેન ઑફ મેથેમેટિક્સ (Men of Mathematics)' વાંચેલું અને ફર્માનું (Fermat) જાણીતું પ્રમેય સાબિત કરેલું. નૅશ તે સમયે દેશમાં દસ જ જણને અપાતી જ્યૉર્જ વેસ્ટિન્ગહાઉસ (George Westinghouse) સ્કૉલરશિપ હરીફાઈમાં જીતેલા. આ સ્કૉલરશિપ લઈને કાર્નેગી ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ઑફ ટેકનોલૉજીમાં (Carnegie Institute of Technology) કેમિકલ એન્જિનિયર થવા માટે જૂન ૧૯૪૫માં ટ્રેઈનથી પિટ્સબર્ગ આવ્યા. પહેલી સેમિસ્ટરમાં મિકેનિકલ ડ્રૉઇંગ લીધેલું. આ ન ગમતાં કેમિકલ એન્જિનિયરિંગના બદલે રસાયણશાસ્ત્ર મુખ્ય વિષય રાખ્યો. રસાયણશાસ્ત્રની પ્રયોગશાળામાં મદદનીશ તરીકે કામ કરતાં કરતાં કોઈ સાધન તૂટી જતાં સ્ટાફ જોડે બોલાચાલી થઈ. ફિઝિકલ કેમેસ્ટ્રીના કૉર્સમાં પ્રોફેસર બધા વિદ્યાર્થીઓને ધ્યાનમાં લઈને અઘરું ગણિત વાપર્યા વગર ભણાવ્યું જે નૅશને બિલકુલ ન ગમ્યું. આ કૉર્સમાં તેમને ગ્રેડ C મળ્યો.

કાર્નેગીએ નવા કૉર્સિસ ભણાવવાના ચાલુ કર્યા. ગણિતવિભાગને સમૃદ્ધ કરવા માટે જોહ્ન સીન્જને લાવ્યા. વૈદ્યસાહેબ અને સાપેક્ષવાદના કારણે ઘણા બધા જે. એલ. સીન્જથી પરિચિત છે. સીન્જ એક આંખે કાળો પટ્ટો પહેરતા અને એક નાકે ફિલ્ટર રાખતા. આ બધું વિચિત્ર લાગે, પણ આનંદિત સ્વભાવના. વિદ્યાર્થીઓને ગણિત ભણવા આકર્ષતા. નૅશ પણ સીન્જથી આકર્ષાયા અને ટેન્સર કેલક્યુલસ (Tensor Calcules) અને રીલેટિવિટી (Relativity) તેમના હાથ નીચે ભણ્યા. નૅશનું સ્વતંત્ર રીતે વિચારવાનું અને અઘરા દાખલાઓની ભૂખ સીન્જને પ્રભાવિત કરી ગઈ. આથી સીન્જ નૅશને ગણિત મુખ્ય વિષય તરીકે રાખવા પ્રોત્સાહન આપતા. નૅશને

ગણિતશાસ્ત્રી બનીને પૈસા કમાવાય તે વિશે શંકા હતી, પણ આખરે યુનિવર્સિટીના અધ્યાપક બનાય તેનો ખ્યાલ આવતાં ગણિતને મુખ્ય વિષય રાખીને ભણ્યા.

પસંદગીના વિષય તરીકે 'International Economics' ભણેલા અને આના કારણે તેમના અર્થશાસ્ત્રના વિચારો (Ideas) અને પ્રશ્નો ઉપરના સંશોધનનો "The Bargaining Problem" નામનો લેખ Econometricaમાં પ્રસિદ્ધ થયેલો.

૧૯૪૮માં ગણિત વિષયની B. S. અને M. S. ડિગ્રીઓ મેળવી.

પ્રિન્ટસન અને ધી ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ફૉર એડવાન્સ્ડ સ્ટડી (The Institute for Advanced Study, IAS)

૧૯૪૮ના સ્પ્રિન્ગ સેમીસ્ટારમાં નૅશને હાર્વર્ડ (Harvard), પ્રિન્સટન, શિકાગો અને મિશિગન (Michigan) યુનિવર્સિટીઓના અનુસ્નાતક વિભાગોમાં પ્રવેશ (Admission) મળ્યો. નૅશને હાર્વર્ડમાં જવાનો ખ્યાલ હતો, પણ હાર્વર્ડે પ્રિન્સટન કરતાં થોડાક જ ઓછા પૈસાની સ્કૉલરશિપ આપેલી. તે સમયે પ્રિન્સટને દસ વિદ્યાર્થીઓને અનુસ્નાતક પ્રોગ્રામમાં લીધેલા, જ્યારે હાર્વર્ડે ૨૫ વિદ્યાર્થીઓને અનુસ્નાતક પ્રોગ્રામમાં લીધેલા. નૅશના પ્રોફેસર ડફ્ફિને (Duffin) ભલામણપત્રમાં લખ્યું હતું કે "This man is genius. (આ માણસ અલૌકિક બુદ્ધિવાળો છે)." આના ઉપરથી પ્રિન્સટનના ગણિત વિભાગે સારામાં સારી સ્કૉલરશિપ સાથે એડમિશન આપેલું અને નૅશને પ્રિન્સટન લાવવા ગણિત વિભાગના વડા પ્રો. સોલોમન લીફશીટ્ઝે (Soloman Lefchetz) પત્રમાં લખેલું કે, "We Like to catch promising man when they are young and open - minded. (આશાસ્પદ વ્યક્તિ જ્યારે જુવાન અને નવા વિચારોને સ્વીકારવા તૈયાર હોય ત્યારે અમને હાથમાં લેવાનું ગમે છે)" આ નૅશને ખૂબ ગમેલું અને તેમને લાગેલું કે પ્રિન્સટનને તેમની કિંમત છે. ગણિત વિભાગની જોહ્ન એસ. કેનેડી ફેલોશિપ પ્રતિષ્ઠિત ફેલોશિપ હતી જે વાર્ષિક $૧,૧૫૦ની હતી. તે સમયે વાર્ષિક ફી $ ૪૫૦ હતી અને ડૉર્મિટરિ (dormitory)ની રૂમનું વાર્ષિક ભાડુ $ ૨૦૦ હતું અને જમવા માટે અઠવાડિયાના $ ૧૪ હતા. નૅશના મગજમાં એવો પણ ખ્યાલ હતો કે આલ્બર્ટ આઇન્સ્ટાઈન અને જોહ્ન વૉન નોયમેન (Jone Von Neuman) પ્રિન્સટનમાં છે. હા, તેઓ પ્રિન્સટનમાં હતા પણ પ્રિન્સટન યુનિવર્સિટીમાં ન હતા. આ બધાં કારણોએ નૅશે પ્રિન્સટન જવાનો નિર્ણય લીધો.

એક સમયે ચિત્રકારો અને નવલકથાકારો માટે પૅરિસ, તત્ત્વજ્ઞાનીઓ તથા નાટ્યકારો માટે એથેન્સ હતું, તેવું જ ૧૯૪૮માં ગણિતશાસ્ત્રીઓ માટે પ્રિન્સટન હતું. હાલમાં પણ એમઆઈટી અને પ્રિન્સટન છે. નિલ્સ બોહ્રના (Niels Bohr) ભાઈ હૅરાલ્ડ બોહ્ર ૧૯૩૬માં 'પ્રિન્સટન વિશ્વનું ગણિતનું કેન્દ્ર છે' તેવું કહેતા. ફાઈન હૉલમાં (Fine Hall) ગણિત વિભાગ છે અને તેની બાજુમાં ગણિત વિભાગના જેવો જ પ્રખ્યાત ભૌતિકશાસ્ત્ર વિભાગ છે. ફાઈન હૉલમાં અંગ્રેજી ભાષા ઘણા જુદાજુદા ઉચ્ચારોથી બોલાતી હોઈને તે ભાષાઓના મિશ્રણને ફાઈન હૉલ અંગ્રેજી તરીકે ઓળખવામાં આવતું. ફાઈન હૉલની હવામાં જ ગણિતના વિચારો અને સૂત્રો આવેલાં છે. તમે હાથ પહોળો કરો અને બંધ કરો તેટલામાં તો તમે ગણિતથી ભરેલી હવા પકડી લીધી હશે અને ગણિતનાં સૂત્રો તમારા હાથને ચોંટી ગયાં હશે. તમારે કોઈ જાણીતા ગણિતશાસ્ત્રીને જોવા હોય તો તમારે તેમના ત્યાં જવાની જરૂર નથી. શાંતિથી પ્રિન્સટનમાં બેસો, મોડા કે વહેલા ફાઇન હૉલમાં આવશે જ.

ફાઇન હૉલથી એક જ માઇલ દૂર ધી ઇંન્સ્ટિટ્યૂટ ફૉર એડવાન્સ્ડ સ્ટડી (The Institute for Advanced Study-IAS) આવેલું છે. જ્યાં આઇન્સ્ટાઈન, ગોડેલ (Godel), ઓપ્પન હાઈમર (Oppenheimer) અને વૉન નૉયમૅન્ન (Von Neumann) પાટીઆ ઉપર લખી લખીને માથાકૂટ કરતા જ હોય છે. જે આજે પ્રિન્સટન સેમિનારમાં રજૂ થાય છે, તેની ચર્ચા પછીના અઠવાડિયે પૅરિસ અને બર્કલીમાં અને તે પછીના અઠવાડિયે ટોકિયો અને મોસ્કોમાં થતી રહે છે.

બેમ્બર્ગ ડિપાર્ટમેન્ટ સ્ટોરની શરૂઆત ન્યૂઆર્કથી (Newark) થયેલી. આના માલિકો ભાઈ અને બહેન હતાં. ૧૯૨૯માં શેરબજાર એકદમ તૂટીને નીચે આવી ગયું. આવું બન્યું તેના છ અઠવાડિયાં પહેલાં જ તેમણે બધું વેચી દીધેલું અને આ વેચાણના અઢી કરોડ ડૉલર

મળેલા ($ ૨૫ M.). ન્યૂ જર્સી રાજ્યને તેમની કૃતજ્ઞતા દર્શાવવા ડેન્ટલ કૉલેજ બનાવી આપવાનો તેમનો વિચાર હતો. તેમના સલાહકાર અબ્રાહમ ફ્લેકસ્નરે (Abraham Flexner) ડેન્ટલ કૉલજના બદલે ઉત્તમમાં ઉત્તમ સંશોધન સંસ્થા બનાવી આપવા સમજાવ્યા. આ સંશોધન સંસ્થામાં ન કોઈ શિક્ષક હોય, ન કોઈ વિદ્યાર્થી હોય કે ન કોઈ વર્ગ હોય. આ સંસ્થામાં ફક્ત સંશોધકો જ હોય જેના ઉપર બહારની દુનિયાનું દબાણ ન હોય. ફ્લેકસ્નરે પહેલાં અર્થશાસ્ત્રની સ્કૂલનો વિચાર કરેલો, પણ પછી તેમને સમજાવવામાં આવ્યું કે ગણિત પાયાનું અને સૌથી અગત્યનું ગણાય. ભાઈ અને બહેનને સમજાવી શકાયું કે ન્યુઆર્કનું વાતાવરણ જ્યાં રંગોની ફેક્ટરીઓ અને કતલખાનાં છે તે આવી સંશોધન સંસ્થામાં આવનારી વ્યક્તિઓ માટે યોગ્ય વાતાવરણ પૂરું પાડી ન શકે, અને પ્રિન્સટન ન્યૂઆર્કનું પરૂ જ ગણાય !! આથી ભાઈ અને બહેન પ્રિન્સટનમાં ઉત્તમમાં ઉત્તમ પ્રકારનું ગણિતનું કેન્દ્ર સ્થાપવા તૈયાર થયાં જેને આપણે The Institute for Advancd Study (IAS) તરીકે ઓળખીએ છીએ. હાલમાં તો IASમાં ઘણા બધા ગણિત સિવાયના પ્રોગ્રામો છે.

આપણે પણ આવું સંશોધન કેન્દ્ર શરૂ કરીએ તો આપણી બધી કૉલેજોને આડકતરી રીતે ફાયદો થશે. સંશોધનની સાચી કિંમત સમજવા માટે આપણે છેલ્લા વીસ વર્ષમાં થયેલો ફેરફાર જોવો જોઈએ. મોબાઈલ અને કમ્પ્યૂટરે આપણી જિંદગી બદલી કાઢી છે. મોબાઈલ અને કમ્પ્યૂટર બદલવામાં આપણો કેટલો ફાળો ? આવું તો લગભગ ઘણાં ક્ષેત્રોમાં થયું છે. ડૉ. જૈન અને શ્રી મણિભાઈ પ્રજાપતિ નામાંકિત (Distinguished) અધ્યાપકની નિમણૂક માટે વારંવાર કહે છે. સંશોધનને મહત્ત્વ ન અપાય તો વિશ્વવિદ્યાલય નામનો અર્થ ખરો ? આપણે આ માટે ત્રણથી ચાર કરોડ રૂપિયા ભેગા કરી શકીએ. આના વ્યાજમાંથી બે યુવાન નામાંકિત અધ્યાપકોની નિમણૂક કરી શકીએ. આપણી સંસ્થાઓ જે પરિસ્થિતિમાં છે તેમાં સુધારો વધારો કરવા માગતી ન હોઈને આપણને પૈસાની જરૂરિયાત લાગતી નથી. પણ બીજુ કંઈ નહિ, પણ આપણે સંશોધનને અને નવા વિચારોને મહત્ત્વ આપવું જોઈએ.

સોમવાર સપ્ટેમ્બર ૮, ૧૯૪૮ના રોજ બ્લ્યુફિલ્ડથી તાજો નવો સૂટ પહેરીને ટ્રેનમાં કપડાં, પુસ્તકો વગેરે લઈને નૅશ પ્રિન્સટન રેલવે જંક્શને આવ્યા અને ત્યાંથી ડીન્કીમાં બેસીને પ્રિન્સટન યુનિવર્સિટીએ આવ્યા. બીજા દિવસે સાંજના ગણિત વિભાગના વડા પ્રો. લીફશીટ્ઝે ગણિત વિભાગના તાજા ગ્રેજ્યુએટ વિદ્યાર્થીઓને ભેગા કરીને ઉત્સાહપૂર્વક પ્રેરણા આપતી વાતો કરી. પ્રિન્સટનનો ગણિત વિભાગ લીફશીટ્ઝેના આવતા પહેલાં તદ્દન સામાન્ય હતો. લીફશીટ્ઝે નવા પ્રોફેસરોની ભરતી ફક્ત ને ફક્ત સંશોધનના આધારે કરીને પ્રિન્સટનના ગણિત વિભાગને અમેરિકામાં ખૂબ જ આગળ પડતો બનાવ્યો.

લીફશીટ્ઝનો જન્મ રશિયામાં થયેલો, પણ ફ્રાન્સમાં ભણેલા. ફ્રાન્સના નાગરિક ન હોઈને શીખવી ન શક્યા. ફ્રાન્સમાં એન્જિનિયરિંગનું ભણીને યુ. એસ.એ (U.S.A.) આવ્યા. પિટ્સબર્ગમાં (Pittsburgh) વેસ્ટિન્ગહાઉસમાં નોકરી કરતા હતા ત્યાં ટ્રાન્સફૉર્મર ધડાકા સાથે ઊડ્યું અને લીફશીટ્ઝના બંને હાથને દઝાડી ગયું. આ બધું સરખું થતાં વર્ષો ગયાં અને આના કારણે ખિન્નતા (Depression) આવતી. આ સમય દરમિયાન ગણિત માટેનો તેમનો સાચો પ્રેમ દેખાયો, ક્લાર્ક યુનિવર્સિટીમાંથી ગણિતમાં Ph.D. થયા. નેબ્રાસ્કા અને કેન્સાસમાં ભણાવ્યા પછી તેમનું કામ જોઈને પ્રિન્સટને તેમને ખાસ આમંત્ર્યા.

ક્લાસમાં ભણાવવાનું શરૂ વાના આગલા દિવસે (શુક્રવાર) ગ્રેજ્યુએટ વિદ્યાર્થીઓને પ્રો. લીફશીટ્ઝ તડ અને ભડ કહેતા, ‘‘સરસ કપડાં પહેરો.’’, ‘‘તું મજૂર જેવો લાગે છે, ગણિતશાસ્ત્રી જેવો નહિ.’’, ‘‘વાળ કપાવી આવ’’, ‘‘તમે ક્લાસમાં આવો કે ન આવો, તે તમારે જોવાનું.’’, ‘‘તમારા ગ્રેડ જોડે કોઈ સંબંધ નથી, ફક્ત ‘Generals’ ગણાશે.’’ અને ‘‘બપોરના ચા માટે આવવાનું બધાના માટે ફરજિયાત છે.’’ ત્રણ વાગે બધા ક્લાસ પૂરા થતાં, દરરોજ ત્રણથી ચાર સુધી ફાઈન હૉલમાં ચા અને બિસ્કિટ મુકાતાં. બધા પ્રોફેસરો ફરજ માનીને આવતા અને વિદ્યાર્થીઓને મળતા. બધો સ્ટાફ અને વિદ્યાર્થીઓ આવતા. એકબીજાના પરિચયમાં રહેતા. સામાન્ય રીતે સેમિનાર સાડા ચારથી શરૂ થતો અને

૫.૩૦ કે છ વાગે પૂરો થતો.

બધા વિષયો શીખવવામાં આવતા. આ વિષયોની પરીક્ષા ન હતી, પણ Ph.D માટે યોગ્યતાની (Qualifying) પરીક્ષા ફરજિયાત હતી જેને અહીંયાં બધા 'જનરલ્સ, Generals' તરીકે ઓળખતા. આ પરીક્ષામાં પાંચ વિષયો હતા, ત્રણ વિષયો ગણિત વિભાગ નક્કી કરતો અને બે વિષયો વિદ્યાર્થી નક્કી કરતો. પહેલા વર્ષના અંતે કે બીજા વર્ષની શરૂઆતમાં વિદ્યાર્થીએ 'જનરલ્સ' લેવાની રહેતી.

મોટા ભાગના ગ્રેજ્યુએટ વિદ્યાર્થીઓ ગ્રેજ્યુએટ કૉલેજમાં રહેતા. આ રહેવાની કૉલેજ ફાઈન હૉલથી લગભગ એક માઈલ દૂર હતી. નૅશને ફેલોશિપના કારણે આગવી રૂમ મળી હતી, જ્યારે મોટા ભાગને બે જણ વચ્ચે એક રૂમ હતી. ગ્રેજ્યુએટ વિદ્યાર્થીઓ સાથે જ સવારનો નાસ્તો, બપોરનું ભોજન અને સાંજનું જમણ લેતા. સવારનો નાસ્તો અને બપોરનું ભોજન બ્રેકફાસ્ટ રૂમમાં અપાતું. જ્યારે સાંજનું જમણ પ્રોક્ટર હૉલમાં અપાતું, જ્યાં ટાઈ અને કોટ ફરજિયાત હતાં. આ હૉલમાં ઊંચી અને વિશાળ બારીઓ હતી અને લાંબાં લાકડાનાં ટેબલો અને ખુરશી હતી. મીણબત્તીઓ ન હતી અને દારૂ પણ ન હતો, ખોરાક સારામાં સારો હતો. સાંજની પ્રાર્થના કૉલેજના ડીનની હાજરીમાં થતી. પ્રિન્સટનના ગણિતના ગ્રેજ્યુએટ વિદ્યાર્થીઓ બધા જ સાથે જ જમતા, ચા-પાણી પીતા અને ગણિતને લગતી ચર્ચાઓ કરતા.

નૅશને ગણિત વિભાગમાં ભણાવવામાં આવતા ટૉપૉલૉજી (Topology), ઑલજીબ્રીક જ્યૉમેટ્રી (Algebraic Geometry), લૉજિક (Logic) અને ગેઈમ થિયરીમાં (Game Theory) રસ હતો. પહેલા વર્ષમાં ઘણું બધું શીખ્યા, પણ નૅશ ભણાવાના વર્ગોમાં જવાનું પસંદ ન કરતા. તેમની સાથેના વિદ્યાર્થીઓમાંથી કોઈએ તેમની સાથે કોઈ વિષયના વર્ગમાં નિયમિત જોયા હોય, આ દરમિયાન કોઈએ નૅશને પુસ્તકો સાથે પણ જોયા નથી. હકીકતમાં ઓછામાં ઓછું નૅશ વાંચતા. નૅશ તેમને જોઈતી જરૂરી માહિતી પ્રોફેસરો અને સાથી મિત્રોને પ્રશ્નો પૂછીને મેળવતા. તે ક્લીપબૉર્ડ સાથે જ રાખતા અને સતત રીતે પોતાની જાતને માટે બધી નોંધો કરતા. તેમના હસ્તાક્ષર બીજા માટે વાંચવા અઘરા હતા. તે બધાના માટેની રૂમમાં (Common room) બધાની જોડે વાતો કરીને માહિતી મેળવી લેતા. તે ખૂબ બારીક સવાલો પૂછતા.

એવું લાગે છે કે નૅશ તેમનો સમય વિચારવામાં જ કાઢતા. તેમની સાથેના વિદ્યાર્થી મેલ્વિન હૉસ્નરના (Melvin Hausner) જણાવ્યા પ્રમાણે, ''નૅશ વિચારોમાં જ ડૂબેલા રહેતા. તે એકલા જ કૉમન રૂમમાં વિચારતા બેઠા હોય. તે તમારી પાસેથી નીકળે પણ તમને જોયા ન હોય તેવું બને. પોતે ગણગણ કરતા જ હોય કે સિસોટી વગાડતા હોય. તમે તેમને વિચારતા જોઈ શકો.'' તે હંમેશાં પ્રશ્નો જોતા હોય. તેઓ વણઉકલ્યા પ્રશ્નોથી સજાગ રહેતા. તેમના સાથીદારો નૅશને માનથી જોતા, પણ ઘણા બધાને નૅશ ગમતા નહિ. સ્પ્રિન્ગ સેમિસ્ટાર ૧૯૪૯માં નૅશને તકલીફ દેખાઈ. સ્ટીનરૉડ (Steenrod), લીફશીટ્ઝ અને ટકર (Tucker) નૅશના ટેકેદારો હતા અને તેમને લાગતું કે નૅશ ગણિતશાસ્ત્રી તરીકે સારું કામ કરશે. ગણિત વિભાગમાં બીજા ભાગના પ્રોફેસરો એવું માનતા કે નૅશ પ્રિન્સટનને લાયક નથી. આવું માનનારાઓમાં પ્રોફેસર આર્ટિન હતા. આર્ટિન (Artin) અને નૅશ કૉમન રૂમમાં ઘણી વાર સામસામે અથડાયેલા. આર્ટિનને નૅશ ફક્ત ઉદ્ધત નહિ પણ ગણિતના ઘણા ભાગથી અજ્ઞાત લાગ્યા. ફેકલ્ટીની મીટિંગમાં આર્ટિને જણાવેલું કે નૅશ કોઈ રીતે વિભાગની 'જનરલ્સ' પાસ કરે તેવી શક્યતા જોતા નથી. આ પરીક્ષાઓ વિદ્યાર્થીએ પહેલા વર્ષના અંતે લેવાની હોય છે. લીફશીટ્ઝે જ્યારે આવતા વર્ષ માટે એટમિક એનર્જી કમિશનની (Atomic Energy Commission) ફેલોશિપ માટે નૅશનું નામ સૂચવ્યું ત્યારે આર્ટિને તેનો વિરોધ કરેલો એટલું જ નહિ પણ નૅશ પ્રિન્સટનના લાયક ન હોઈને તેમણે પ્રિસ્ટન છોડીને જવું જોઈએ. જાણે કે લીફશીટ્ઝે અને ટકરે આર્ટિનના વિરોધ સામે થઈને ફેલોશિપ નૅશને આપી અને 'જનરલ્સ' સ્પ્રિન્ગમાં ન લેવા સૂચવ્યું અને નૅશે 'જનરલ્સ' બીજા વર્ષે લેવી તેવું સૂચવ્યું.

પ્રો. ટકર સપ્ટેમ્બર ૧૯૪૯થી શરૂ થતું એકેડેમિક વર્ષ સ્ટેનફર્ડ યુનિવર્સિટીમાં કાઢવાના હોઈને તેની તૈયારી માટે ૧૯૪૯ના ઉનાળા દરમિયાન તેમની ઑફિસમાં હતા. ત્યાં અણધાર્યા નૅશ આવ્યા. નૅશને ગેઈમ થિયરીમાં

સંશોધનમાં સારાં પરિણામો મળેલાં હોઈને તેમની Ph.D.ની થીસિસ માટે એડવાઈઝર (Advisor) બનવા માટે પ્રો. ટકરને વિનંતી કરી. પ્રો. ટકર એવું માનતા હતા કે નૅશ પ્રો. સ્ટીનરોડના હાથ નીચે Ph.D.ની થીસિસ તૈયાર કરશે. આથી આ બાબતમાં તેમણે ખાસ વિચાર્યું ન હતું, પણ ગેઈમ થિયરી હોઈને પ્રો. ટકરે નૅશની Ph.D.ની થીસિસના એડવાઈઝર બનવાની હા પાડી.

૧૯૪૯ની ઉનાળાની રજાઓમાં પ્રિન્સટનમાં રહીને 'જનરલ્સ'ની બરાબર તૈયારી કરી. સપ્ટેમ્બર ૧૯૪૯માં નવું એકૅડેમિક વર્ષ શરૂ થતાં નૅશની 'Generals' માટે ગણિત વિભાગના વડા લીશીઝે ચર્ચ, સ્ટીનરૉડ અને સ્ટેનફર્ડના પ્રો. સ્પેન્સરની કમિટી બનાવી. નૅશ ખાસ તકલીફ વગર સરળતાથી 'Generals' પાસ થઈ ગયા.

દાવપેચના નિયમો (Game Theory, ગેઈમ થિયરી)

ગેઈમ થિયરીનો લોકપ્રિય સેમિનાર પ્રો. ટકર ચલાવતા હતા. નૌકાદળે એન્ટીસબમરિન લડાઈમાં ગેઈમ થિયરીનો સફળતાપૂર્વક ઉપયોગ કરેલો, આથી ગેઈમ થિયરીના સંશોધનમાં નૌકાદળ પૈસાનો ધોધ વહેવડાવતી. આ સેમિનારના સૌથી પહેલા વક્તા વૉન નૉયમૅન્ન (Von Neumann) હતા. નૅશ વૉન નૉયમૅનના ભાષણમાં હાજર હતા. રસ પડે તેના અને વણ ઉકલ્યા ઘણા પ્રશ્નો ગેઈમ થિયરીમાં જોઈને નૅશની કુતૂહલતા વધી. દર ગુરુવારે સાંજના પાંચ વાગે શરૂ થતા ગેઈમ થિયરીના સેમિનારમાં નિયમિત આવતા.

વૉન નૉયમૅન રમતોનું ગણિતમાં વર્ણન કરનારા સૌથી પ્રથમ હતા. તેમણે આ ક્ષેત્રમાં પાયાનું પ્રમેય 'Min-Max' સાબિત પણ કરેલું નૉયમૅન અને મોર્ગન્સ્ટર્નનું (Morgenstern) લખેલું પુસ્તક "ધી થિયરી ઑફ ગેઇમ્સ ઍન્ડ ઇકોનોમિક બીહેવિઅર (The Theory of Games and Economic Behavior)" ૧૯૪૪માં પ્રસિદ્ધ થયું. બધી રીતે ક્રાન્તિકારી પુસ્તક હતું.

ગેઈમ થિયરીનો ખ્યાલ આવે તે માટે સરળ ઉદાહરણ જોઈએ. બે ખેલાડીઓ એકી અને બેકી આંકડાઓની રમત રમે છે. ખેલાડી Iને આપણે 'એકી' ખેલાડી કહીએ અને ખેલાડી IIને 'બેકી' ખેલાડી કહીએ. આ બંને ખેલાડીઓ એક જ સમયે ૧ અને ૨ સંખ્યાઓમાંથી ગમે તે એક જ સંખ્યા કહે છે.

જો આ સંખ્યાઓનો સરવાળો એકી હોય, તો 'બેકી' એ સરવાળા જેટલા રૂપિયા 'એકી'ને આપવાના. જો આ સરવાળો બેકી હોય, તો 'એકી'એ આ સરવાળા જેટલા રૂપિયા 'બેકી'ને આપવાના. આને સરળતાથી ટેબલમાં દર્શાવી શકાય.

		ખેલાડી II (બેકી) 1	2
ખેલાડી I (એકી)	x 1	-2	3
	2	3	- 4

આપણે એકીને શું મળે તે ટેબલમાં દર્શાવ્યું છે. ધારો કે 'એકી' ૧ અને 'બેકી' ૧ બોલે, તો આ સંખ્યાઓનો સરવાળો બેકી સંખ્યા ૨ થાય. આથી 'એકી'એ 'બેકી'ને ૨ રૂપિયા આપવા પડે. જેને આપણે ટેબલમાં-૨થી દર્શાવ્યું છે. ધારો કે 'એકી' ૧ બોલે અને 'બેકી' બે બોલે તો આ સંખ્યાઓનો સરવાળો એકી સંખ્યા ૩ થાય. એથી 'બેકી'એ 'એકી'ને ૩ રૂપિયા આપવાના થાય જેને આપણે ટેબલમાં ૩ વડે દર્શાવ્યું છે. આ જ પ્રમાણે આપણે બાકીની બે જગ્યાઓ ૩ અને ૪ વડે પૂરી દઈએ.

હવે ધારો કે આ રમત લાંબો વખત રમાય છે. 'એકી' ૩/૫ વખત ૧ બોલે છે અને ૨/૫ વખત ૨ બોલે છે.

(૧) હવે ધારો કે 'બેકી' દરેક વખતે ૧ જ બોલે, તો સરેરાશ શું થાય તે જોઈએ. એકી ૩/૫ વખત ૧ જ બોલે છે, આથી આ બંને સંખ્યાઓનો સરવાળો ૩/૫ વખત સંખ્યા બે થશે. આથી 'બેકી'ને 'એકી' એ બે રૂપિયા ૩/૫ વખત આપવા પડશે. 'બેકી' તો બાકીના ૨/૫ વખત ૧ બોલે છે, જ્યારે આ ૨/૫ વખતે 'એકી' ૨ બોલે છે. આથી ૨/૫ વખત સરવાળો ૩ થાય છે. આથી ૨/૫ વખત 'બેકી'એ એકીને ૩ રૂપિયા આપવા પડે. આથી 'એકી'ને મળતી રકમ.

-૨ x ૩/૫ + ૩ x ૨/૫ = ૦ થાય.

(૨) હવે ધારો કે 'બેકી' આખો વખત ૨ બોલે છે. 'એકી' ૩/૫ વખત ૧ બોલતો હોઈને, બંને સંખ્યાઓનો સરવાળો ૩/૫ વખત ૩ થશે. આથી 'બેકી'એ ૩/૫ વખત 'એકી'ને ૩ રૂપિયા આપવા પડશે. 'એકી' ૨/૫ વખત ૨ બોલતો હોઈને, આ વખતે બંને

સંખ્યાઓનો સરવાળો ૪ થશે. આથી 'એકી'એ 'બેકી'ને ચાર રૂપિયા ૨/૫ વખત આપવા પડે. આથી 'એકી'ને મળતી રકમ.

૩ (૩/૫) - ૪ (૨/૫) = ૧/૫ થાય. આથી 'એકી'ને સરેરાશ ૨૦ પૈસા દરેક રમત વખતે મળે.

જો આ રીતે 'એકી' પસંદ કરે, તો જ્યારે 'બેકી' એક કહે ત્યારે 'એકી'ને કંઈ ન મળે અને 'બેકી' ૨ કહે ત્યારે તે રમતે 'એકી'ને ૨૦ પૈસા મળે.

સવાલ : 'એકી' કઈ રીતે બોલે કે જેથી 'એકી'ને 'બેકી' ગમે તે બોલે તો પણ પૈસા મળે ?

ધારો કે 'એકી' pમો ભાગ ૧ કહે અને (૧-p)મો ભાગ ૨ કહે છે. આથી 'બેકી' ગમે તે કહે, તો 'એકી'ને સરેરાશ -૨p+૩ (૧-p) મળશે. એ જ રીતે 'એકી' (૧-p)મો ભાગ ૨ કહેશે, ત્યારે 'એકી'ને સરેરાશ ૩p-૪ (૧-p) મળશે. 'એકી' એ રીતે p પસંદ કરે કે જેથી આ આ બંને સરખા થાય. આથી

-૨p + ૩ (૧-P) = ૩p-૪ (૧-p) છે.

∴ −૧૨p = - ૭ ∴ p=૭/૧૨

જો 'એકી' ૭/૧૨ વખત ૧ કહેશે અને ૫/૧૨ વખત ૨ કહેશે, તો 'એકી'ને કશુંય જોડવું નહિ પડે, બલકે -૨(૭/૧૨) + ૩ (૫/૧૨) = ૧/૧૨ રૂપિયા તરીકે વખતે મળશે. ૧/૧૨ કિંમત એ આ રમતની કિંમત છે અને આ મેળવવાની રીત 'મિનિમૅક્સ' યોજના કહેવાય છે. આના ઉપરથી વૉન નૉયમૅન્ને ગેઈમ થિયરીનું પાયાનું પ્રમેય મેળવેલું. આપણે ઉદાહરણ બે ખેલાડીઓથી શરૂ કર્યું. આ બંને ખેલાડીઓ એકબીજાથી સ્વતંત્ર રીતે કામ કરે છે અને એકી સાથે કરે છે. એક ખેલાડીની ખાદએ બીજા ખેલાડીનો નફો છે. આને અંગ્રેજીમાં zero-sum (શૂન્ય-સરવાળો) ગેઈમ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

મિનિમેક્સ રમત પ્રમેય : (mini max Theorem) : બે ખેલાડીઓની શૂન્ય-સરવાળાની રમતમાં : (૧) કોઈ કિંમત V છે, જે આ રમતની કિંમત તરીકે ઓળખાય છે.

(૨) ખેલાડી I માટે એવી મિશ્રણ યોજના છે કે ખેલાડી II ગમે તેમ રમે તો પણ ખેલાડી Iનો સરેરાશ નફો દરેક કિંમત V જ છે.

(૩) ખેલાડી I ગમે તે કરે તો પણ ખેલાડી IIની સરેરાશ ખોટ વધારેમાં વધારે દરેક કિંમતે V છે.

નૅશ બે ખેલાડીઓ શૂન્ય-સરવાળા માટેના Mini Max પ્રમેયની જગ્યાએ શૂન્ય-સરવાળા વગરના સંજોગો અને ગમે તેટલા ખેલાડીઓ માટે પ્રમેય મેળવી શક્યા. આ પ્રમેય ઘણી બધી જગ્યાએ વાપરી શકાય છે. બે ખેલાડીઓના શૂન્ય-સરવાળાના MinMax ઉકેલને બદલે ઘણા ખેલાડીઓની અસહકારની રમતોનાં ઉકેલોને નૅશ સમતુલા બિંદુ (Equilibrium Point) કહે છે. અને નૅશ થીસિસમાં સાબિત કરે છે કે અસહકારની લડતમાં ઓછામાં ઓછું એક સમતુલા બિંદુ છે. 'અસહકારની રમતો (Non-Cooperative Games)'ના નામની થીસિસ મે ૧૯૫૦માં ગણિત વિભાગમાં આદરપૂર્વક રજૂ કરીને Ph.D. થયા.

૧૯૫૦-૫૧ પ્રો. ટકરની મદદથી નૅશ પ્રિન્સટનમાં કાઢી શક્યા. પ્રિન્સટન યુનિવર્સિટીના પ્રથમ વર્ષના વિદ્યાર્થીઓને કલનશાસ્ત્ર ભણાવવાનું હતું અને બાકીનો સમય સંશોધન માટે. આ સંશોધન માટે પ્રો. ટકરની Office of Naval Researchમાંથી Research Assistantનો પગાર અપાતો.

એમઆઈટી MIT (Massachusatts Institute of Technology)

૧૯૫૦ના સમયમાં એમઆઈટી હાલના જેવી સંશોધન સંસ્થા તરીકે જાણીતી ન હતી. તે સમયે અમેરિકાની આગળ પડતી એન્જિનિયરિંગ સ્કૂલ હતી. લડાઈ વખતે લડાઈનાં સાધનોની નવી નવી શોધ કરનાર લિન્કન લેબોરેટરીના (Lincoln Laboratory) સ્ટાફમાં કોઈ પ્રખ્યાત ન હતું, બધો સ્ટાફ અજાણ્યા યુવાનોનો હતો. અર્થશાસ્ત્ર, ગણિત, ભાષાઓ, કમ્પ્યૂટર સાયંસના વિભાગોની શરૂઆત હતી. અર્થશાસ્ત્રમાં અનુસ્નાતક પ્રોગ્રામ જ ન હતો. ભૌતિકશાસ્ત્રમાં કોઈ નૉબેલ પ્રાઈઝ મેળવનાર અધ્યાપક ન હતા. ભણાવવાનો ભાર પણ વધારે હતો. જાણીતા અધ્યાપકોને પણ અઠવાડિયામાં સોળ કલાક ભણાવવાનું રહેતું અને આ પણ ઉપસ્નાતક વિદ્યાર્થીઓને શરૂઆતના વિષયો. હાર્વર્ડ, યેલ (Yale) કે પ્રિન્સટનના અધ્યાપકો જેવા જાણીતા અધ્યાપકો એ સમયે એમઆઈટીમાં ન હતા.

બીજા વિશ્વયુદ્ધની જીત પછી રશિયાની જોડેની હરીફાઈના કારણે વિજ્ઞાન, એન્જિનિયરિંગ વગેરેમાં દેશ

આગળ રહે તે માટે આર્મી, નેવી, એરફોર્સ એટમિક એનરજી કમિશન અને સેન્ટ્રલ ઇન્ટેલિજન્સ એજન્સીએ યુનિવર્સિટીઓને ખૂબ જ મોટા પ્રમાણમાં આર્થિક ટેકો કર્યો અને આના કારણે ઘણી યુનિવર્સિટીઓમાં ઘણા સુધારા વધારા થયા. એમઆઈટીને પણ આનો લાભ મળ્યો. મિલિટરી સાયંસના વિષયો દરેક ઉપસ્નાતક વિદ્યાર્થી માટે ફરજિયાત હતા. સાયબરનેટિક્સના (Cybernetics) પિતા ગણાતા નૉર્બર્ટ વીનર (Norbert Wiener) ગણિત વિભાગમાં હતા. તેઓ તેમની વિચિત્રતા (Eccentricity) માટે ખૂબ જ જાણીતા હતા. તેમના માટે એવું કહેવાય છે કે તેઓ ક્યાં હતા તેની તેમને ખબર ન હતી. તેઓ પૂછતા, ‘‘આપણે મળ્યા ત્યારે ફેકલ્ટી ક્લબ તરફ જતો હતો કે ફેકલ્ટી ક્લબમાંથી આવતો હતો ?’’ જો ફેકલ્ટી ક્લબમાંથી આવતો હોઈશ તો બપોરના જમ્યો હોઈશ. ૧૯૪૭માં વિલિયમ ટેડ માર્ટિન (Willim Ted Martin) ગણિત વિભાગના વડા નિમાયા. ગણિત વિભાગને ઊંચી કક્ષાએ લઈ જવા માર્ટિને સરસ રસ્તો શોધી કાઢ્યો. પ્રખ્યાત ગણિતશાસ્ત્રીઓ લાવવાને બદલે નવા, તાજા, અને થનગનતા ગણિતશાસ્ત્રીઓને ત્રણ વર્ષ માટે લાવવા. ૧૯૦૪થી મૃત્યુ પામ્યા ત્યાં સુધી ગણિતના અધ્યાપક રહેલા ક્લેરેન્સ લીમ્યુલ ઇલિશા મોરના (Clarence Lemuel Elisha Moore, C. L. E. M) માનમાં ઇન્સ્ટ્રક્ટરશિપ ત્રણ વર્ષ સુધી આપવાનો નિર્ણય લીધો. હાર્વર્ડની બેન્જામિન પિઅર્સ ફેલોશિપની (Benzamin Pierce Fallowship) જેમ C. L. E. Moore ઇન્સ્ટ્રક્ટરશિપ તાજા Ph.D.ને ત્રણ વર્ષ માટે અપાય છે. આ કાયમી જગ્યા નથી.

નૅશ જ્યારે ૨૩ વર્ષના હતા ત્યારે એમઆઈટીમાં સી. એલ. ઈ. મોર ઇન્સ્ટ્રક્ટર બન્યા. તે બધા અધ્યાપકોમાં ઉંમરમાં નાનામાં નાના હોવા ઉપરાંત ઘણા ગ્રેજ્યુએટ વિદ્યાર્થીઓ કરતાં પણ નાની ઉંમરના હતા. છોકરા જેવો દેખાવ અને છોકરા જેવી વર્તણૂકના કારણે કીડ પ્રોફેસર (Kid Professor) તરીકે ઓળખાતા. ભણાવવાનું પ્રમાણમાં ઓછું હતું, પણ તેમના સંશોધનની વચ્ચે આવતું હોઈને તેમને ભણાવવાનું કંટાળાજનક લાગતું. તેમણે વિચક્ષણ રીતે જોઈ લીધું કે તેમનું એમઆઈટીમાં આગળ વધવાનું વિદ્યાર્થીઓને કેવું ભણાવ્યું તેના ઉપર આધારિત નથી. આથી તેઓ બીજા ઇન્સ્ટ્રક્ટરોને પણ સલાહ આપતા. ‘‘જો તમે એમઆઈટીમાં હો, તો ભણાવવાનું ભૂલી જાવ, સંશોધન જ કરો.’’ ૧૯૯૫માં નૅશથી કંટાળેલાએ જણાવ્યું, ‘‘નૅશને વિદ્યાર્થી શીખે કે ન શીખે તેની પડેલી ન હતી, વિદ્યાર્થીઓ પાસે વધારે પડતી માગણીઓ કરતા અને વિષયને લેવાદેવા ન હોય તેની વાતો કરતા અથવા ઊંચી કક્ષાના વિષયની વાતો કરતા.’’ નૅશ ગ્રેડ આપવામાં પણ કડક હતા. ખૂબ જ હોશિયાર (કેટલા ?) વિદ્યાર્થીઓને મજા પડતી, પણ મોટા ભાગના વિદ્યાર્થીઓ નૅશથી ડરતા અને માહિતગાર વિદ્યાર્થીઓ તેમનાથી દૂર રહેતા. કોઈ પ્રસંગે એમઆઈટીના બે નંબરના બિલ્ડિંગના બ્લેકબોર્ડ ઉપર ‘THIS IS HATE JOHN NASH DAY’ દેખાયેલું. નૅશે સાત વર્ષ એમઆઈટીમાં ભણાવેલું. મોટા ભાગે ઉપસ્નાતકના વિદ્યાર્થીઓને કલનશાસ્ત્ર ભણાવેલું.

નૅશ દિવસનો સમય બધાની સહિયારી રૂમમાં (Common Room) સમય કાઢતા. ગણિતવિભાગના ઘણા બધા ગણિતશાસ્ત્રીઓની અવગણના કરતા અને આળસુ, ભાડુતી વગેરે કહીને ટીકા કરતા. એમ્બ્રોસે (Ambrose) કંટાળીને નૅશને કહ્યું, ‘‘તું તારી જાતને પંડિત માનતો હોય તો ઘણા વળેલા ભાગવાળી (Manifold) વસ્તુને યુક્લિડ જગ્યામાં (Euclid Space) બેસાડી શકાય (embed) તે સાબિત કરી બતાવને.’’ નૅશે એમ્બ્રોસનો પડકાર ઝીલતા પહેલાં ઘણા બધાને પૂછી જોયું કે આ પ્રશ્નનો ઉકેલ મેળવવાથી, તેમને પ્રતિષ્ઠા મળશે. રીમાન્ને (Riemann) આ પ્રશ્ન ઉકેલ માટે રજૂ કરેલો. ફુગ્ગાની સપાટી લઈએ તો તે બે પરિમાણની (Two dimensions) છે. તેને પાટિયું જે બે પરિમાણનું છે તેના ઉપર સંપૂર્ણ રીતે મૂકી ન શકાય. ફુગ્ગાની સપાટીને ત્રણ પરિમાણની જગ્યાનો ઉપગણ ગણી શકાય. રેખા, વર્તુલ, પરવલય, ઉપવલય વગેરે એક પરિમાણનાં છે જ્યારે ૮ (અંગ્રેજી ૮) એક પરિમાણનું છે, પણ જ્યાં છેદે છે ત્યાં વિકલન મેળવવામાં તકલીફ પડે. જ્યારે કને બે પરિમાણની જગ્યાનો ઉપગણ ગણી શકાય.

નૅશનું પ્રમેય કહે છે કે જો અમુક જાતની સુંવાળી સપાટી હોય તો તેને યુક્લિડ જગ્યામાં બેસાડી શકાય. નૅશ આની સાબિતી માટે લેવિનસનની ઑફિસમાં દર અઠવાડિયે જઈને શું મેળવ્યું છે તેની ચર્ચા કરતાં શરૂઆતના અઠવાડિયાઓમાં તો તે પૂરેપૂરા ખોટા હતા,

પણ નૅશ વળગ્યા રહ્યા. નૅશ સ્વભાવથી જ મહેનતું હતા. સામાન્ય રીતે એમઆઈટીની તેમની ઑફિસમાં જ દરરોજ (શનિ કે રવિ હોય તો પણ) રાતના દસથી સવારના ત્રણ સુધી કામ કરતા. નૅશ લાંબા અંતરના દોડનાર હતા.

૧૯૫૩ની શરૂઆતના ભાગમાં એમઆઈટીના ગણિતવિભાગના વડા માર્ટિનની નૅશને કાયમી નોકરી આપવાની જાહેરાતે ગણિતવિભાગના અઢાર સભ્યોમાં વાદવિવાદ ઊભો કર્યો. નૅશના દોઢ વર્ષ દરમિયાન ઘણા દુશ્મનો ઊભા થયેલા અને ભણાવવાનું જરાયે સારું ન હતું. વ્હાઈટ હેડના કહેવા પ્રમાણે, ''નૅશ મોટી વાતો કરે છે, અમારામાંથી ઘણાને તે કહે છે તે કરી શકશે કે કેમ તેમાં શંકા છે.''

ઑક્ટોબર, ૧૯૫૪માં એનાલ્સ ઑફ મૅથેમેટિક્સના (Annals of Mathematics) તંત્રીની ઑફિસમાં નૅશની હસ્તલિખિત પ્રત આવી ત્યારે તંત્રીને શું કરવું તેની સમજ ન પડી. આ ગણિતનું પેપર હોય તેવું લાગતું ન હતું અને પુસ્તક જેટલું જાડું હતું. ઇજનેરોની ભાષામાં આ પેપર લખાયેલું હતું, નહિ કે ગણિતશાસ્ત્રીઓની ભાષામાં. જ્યારે કોઈ ગંભીર ગણિતશાસ્ત્રી કહે કે મેં જાણીતા પ્રશ્નનો ઉકેલ મેળવ્યો છે ત્યારે ગણિતશાસ્ત્રીઓની પ્રથા પ્રમાણે ઘણા ગંભીર ગણિતશાસ્ત્રીઓ તેમનું બધું કામ બાજુએ મૂકીને જરૂર પડે ઘણા મહિનાઓ સુધી વખત કાઢીને ''બની શકે તો સીધું કરી આપવાનો પ્રયત્ન કરે''. એનાલ્સના તંત્રીએ બ્રાઉન યુનિવર્સિટીના ગણિતશાસ્ત્રી હર્બર્ટ ફેડરરને (Herbert Federer) નૅશનો લેખ મોકલી આપ્યો. નૅશ અને ફેડરર વચ્ચે ઘણી ચર્ચાઓ થઈ અને ઘણી વખત આ લેખ સુધારાવધારા સાથે લખાયો. આખરે એક વર્ષ પછી સુધારાવધારા કરીને નૅશે લેખ તંત્રીને મોકલી આપ્યો અને સ્વીકારાયો.

નૅશ ૧૯૫૦માં બૉસ્ટનમાં હૉસ્પિટલમાં હતા, ત્યારે તેમની કાળજી નર્સ ઈલીનૉર સ્ટીએરે (Eleanor Stier) રાખેલી. આ પછી પણ એક બીજાના ગાઢ સંપર્કમાં બંને જણ રહેતાં અને તેમના પુત્ર જ્હૉન સ્ટીઅરનો (John Stier) જન્મ જૂન ૧૯, ૧૯૫૩ના રોજ થયેલો. નૅશે તેમના પુત્ર જોહ્ન સ્ટીઅરના જન્મના દાખલામાં તેમનું નામ લખવાની તૈયારી ન બતાવી અને સાથે સાથે તેની પ્રસૂતિનું ખર્ચ આપવાની પણ તૈયારી ન બતાવી.

૧૯૫૪માં સેન્ટા મોનિકા (Santa Monica) કેલિફૉર્નિયાની પોલીસે નૅશની ધરપકડ કરેલી. કાયદાના પાલન માટે પોલીસો છેતરવાની કૃતિ કરતા હોય છે. ખુલ્લામાં અશ્લીલ આચરણ માટે ધરપકડ થયેલી. આના કારણે Rand Corporationમાંથી કાઢી મૂકેલા અને એમનું ઊંચામાં ઊંચું સંરક્ષણ ખાતા માટેનું Clearance પણ પડાવી લીધું.

સપ્ટેમ્બર ૧૯૫૪માં Rand Corporationમાંથી કેમ્બ્રીજ પાછા આવ્યા પછી ભણાવવાની તૈયારી કરતાં થાકતા ત્યારે નૅશ બપોરના એમઆઈટીની મ્યુઝિક લાઇબ્રેરીમાં (Music Library) જાણીતા સંગીતકારો બાક (Bach) અને મોઝાર્ટ (Mozart)નાં સંગીતો સાંભળતા. આ લાઇબ્રેરીમાં મદદનીશની જોડે કોઈ કોઈ વખતે વાતો કરતા. એક વખતે તેમની વિદ્યાર્થિની એલિસિયા (Alicia)ને જોઈને તેમને આશ્ચર્ય થયું. નૅશને મ્યુઝિકલની લાઇબ્રેરીમાં વારંવાર જવાનું થતું અને એલિસિયા નૅશના જોડે વારંવાર લંબાણપૂર્વક વાતો કરતી.

૧૯૫૬ની ઉનાળાની રજાઓમાં આખા મહિનાનું સમર ઇન્સ્ટિટ્યૂટ (Summer Instituite) યુનિવર્સિટી ઑફ વૉશિંગ્ટન, સીઆટ્ટલ (Seattle)માં હતું અને નૅશ ત્યાં ગયેલા. નૅશ તેમનાં માતા-પિતાને પત્ર દ્વારા કે પોસ્ટકાર્ડ દ્વારા જ બધા સમાચાર આપતા. નૅશના પિતાજીનો એક દિવસ ફોન આવ્યો અને નેશને તેમનાં બાની અને બહેનની ચિંતા થઈ પણ ફોન ઉપર તેમના પિતાજીનો ગુસ્સા ભરેલો અવાજ હતો. ઇલીનૉર સ્ટીઅરે નૅશના માતાપિતાને તેમના પૌત્રના સમાચાર આપેલા જેનો આંચકો નૅશનાં માતા-પિતાને પ્રચંડ લાગેલો. નૅશના પિતાએ નૅશને કહ્યું, ''ઘેર આવતો નહિ. સીધો બૉસ્ટન જા અને છોકરી જોડે લગ્ન કર.'' નૅશ છક થઈ ગયા અને દલીલ કરી ન શક્યા. નૅશ બૉસ્ટન ગયા. ઇલીનૉરના વકીલે નૅશને યુનિવર્સિટીને જણાવવાની ધમકી આપી એટલે તેમના પુત્રને નિયમિત ભરણપોષણ માટે આર્થિક ટેકો કરવા તૈયાર થયા.

૧૯૫૬-૫૭

નૅશે એમઆઈટીમાંથી ૧૯૫૬-૫૭ માટે સબૅટિકલ (Sabbatical) રજા (લીવ) લીધી અને આ સમય સંશોધન માટે ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ફૉર ઍડવાન્સ સ્ટડીમાં

(Institute for Advanced Study, IAS) કાઢવાનો નિર્ણય લીધો. આઈએએસ (IAS) ન્યૂયૉર્કથી ખાસ દૂર ન હોઈને ન્યૂયૉર્કમાં એપાર્ટમેન્ટ ભાડે રાખ્યું. આ એપાર્ટમેન્ટની નજીકમાં જ કુરાન્ટ ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ઑફ મેથેમેટિકલ સાયન્સીસ (Courant Institute of Mathematical Sciences) હતું જેને ફૉર્ચ્યૂન (Fortune) માસિકે 'ધી નેશનલ કેપિટલ ઑફ ઍપ્લાઈડ મેથેમેટિકલ ઍનાલીસિસ (The National Copital of applied Mathematical Analysis)' તરીકે ઓળખાવેલું. રિચાર્ડ કૂરાન્ટ (Richard Courant), ગૉસિન્ગનમાં (Gottingen) ૧૯૩૦ની આસપાસ ગણિતના અધ્યાપક હતા. જર્મનીમાં હિટલર યહૂદીઓના વિરુદ્ધ હોઈને, યહૂદીઓ જર્મની છોડીને જતા રહ્યા અને જે રહ્યા તે ગયા. કૂરાન્ટ યહૂદી હોઈને ૧૯૩૭માં ન્યૂયૉર્ક આવ્યા. તે સમયે ન્યૂયૉર્ક યુનિવર્સિટીનો ગણિત વિભાગ જરાયે જાણીતો ન હતો, પણ તે વિભાગે કૂરાન્ટને ગણિતના અધ્યાપક તરીકે લીધા. ન્યૂયૉર્કમાં ઘણા તવંગર અને બુદ્ધિશાળી યહૂદીઓ વસે છે. કૂરાન્ટની પ્રતિષ્ઠા ખૂબ જ ઊંચી હોઈને ગણિત વિભાગ માટે ઘણો મોટો ફંડફાળો એકઠો કરી શક્યા. ન્યૂયૉર્ક યુનિવર્સિટીનો ગણિત વિભાગ હાલમાં (Courant Institute of Mathemetical Sciences) કૂરાન્ટ ઇન્સ્ટિટ્યૂટ ઑફ મેથેમેટિકલ સાયન્સીસ તરીકે ઓળખાય છે. પ્રિન્સટન અને કેમ્બ્રીજના ગણિત વિભાગો જોડે હરીફાઈ કરે તેવું આ કેન્દ્ર છે. ન્યૂયૉર્કના ગણિતમાં હોશિયાર વિદ્યાર્થીઓને આકર્ષે છે.

નૅશ કૂરાન્ટ ઇન્સ્ટિટ્યૂટની એકદમ નજીક રહેતા હાઈને આઈએએસના જેટલો જ સમય કૂરાન્ટ ઇન્સ્ટિટ્યૂટમાં કાઢવા માંડ્યા. સીઆઈએમએસનો સ્ટાફ નૅશને પ્રેમથી આવકારતો. અહીંના સ્ટાફમાં એમઆઈટીના જેવી હરીફાઈ કે વરણાગિયાપણું (Snobbery) ન હતું. પ્રવાહી જે સામાન્ય રીતે રગડા જેવું હોય (Viscocity) જેના ઉપર દબાણની અસર થઈ શકે (Compressible) તેમ હોય અને (ઉષ્ણતામાન) ગરમી વહી શકે તેમ હોય તેવા પ્રવાહીનાં ગતિનાં સમીકરણોના ઉકેલોનું અસ્તિત્વ અને અજોડપણા વિશે ખૂબ જ ઓછી માહિતી હતી. કૂરાન્ટના જમણા હાથ જેવા લુઈસ નિરેનબર્ગે (Louis Nirenberg) નૅશને જણાવ્યું કે ૧૯૩૦થી આ વણઉકલ્યો પ્રશ્ન છે. નિરેનબર્ગ નૅશે જે રીતે એમબેડિંગ પ્રમેયની (Embedding Theorem) સાબિતી આપેલી તેનાથી અંજાઈ ગયેલા તેમને એવું લાગ્યું કે નૅશ આ પ્રશ્નનો ઉકેલ લાવી શકશે.

નિરેનબર્ગે જેવો પ્રશ્ન સૂચવ્યો તેવા જ નૅશ તેનો ઉકેલ મેળવવાના કામે લાગી ગયા, પણ આ પહેલાં ઘણા બધા ગણિતશાસ્ત્રીઓને પૂછી આવ્યા કે આ પ્રશ્ન ખરેખર અગત્યનો છે ? નૅશ વારંવાર નિરેનબર્ગને મળવા આવતા. શરૂઆતમાં નૅશ ક્યાંય જતા હોય તેવું ન લાગ્યું, પણ ધીરેધીરે પ્રગતિ થતી હોય તેવું લાગ્યું. નિરેનબર્ગે આ વિષયના જાણીતા ગણિતશાસ્ત્રી લાર્સ હોર્મેન્ડર (Lars Hormander) પાસે મોકલ્યા. આ બધાની મદદથી તેમની પોતાની અનોખી રીતથી રગડા જેવા, દબાણની અસર થાય તેવા અને ગરમી વહી શકે તેવા પ્રવાહીના ગતિનાં સમીકરણોના પાયાના અસ્તિત્વતા (Existence), અજોડતા (Uniqueness) અને સતતાનાં (Continuty) પ્રમેયો મેળવ્યાં. નૅશની રીત મોખરેથી હુમલો કરીને અઘરા પ્રશ્નો ઉકેલવાની નથી. સૌથી પહેલાં અસુરેખ સમીકરણોને સુરેખ સમીકરણોમાં ફેરવ્યાં અને પછી સુરેખ સમીકરણોના ઉકેલો અસુરેખ રીતોથી મેળવ્યા.

નૅશનાં આ પરિણામોએ તુરત જ બધાનું ધ્યાન દોર્યું. નિરેનબર્ગને લાગ્યું કે નૅશ અલૌકિક બુદ્ધિવાળા છે. લાર્સ હૉર્મેન્ડરના ગુરુ અને પક્ષપાતી વિકલન સમીકરણોના (Partial Differantial Equations) ખાંએ કહ્યું, "આ મેળવવા માટે અલૌકિક બુદ્ધિ હોવી જોઈએ." આ કામ જોઈને કૂરાન્ટે નૅશને ઉદાર પગાર સાથે નોકરી આપવાની તૈયારી બતાવી, પણ નૅશે ન્યૂયૉર્ક કરતાં માસાચુસેટ્સમાં ટેક્સ ઓછો હોય છે તે કારણે ના પાડી. નૅશનાં પરિણામો મેળવવાના થોડાક જ સમય પહેલાં ઇટાલિના યુવાન ગણિતશાસ્ત્રી ઇન્નિયો ડી ત્રિઓર્ગિએ (Ennio De Giorgi) આ પરિણામો મેળવેલાં. આ જાણીને નૅશ ખૂબ જ નિરાશ થયેલા. જો કે બંનેની રીતો જુદી છે.

સપ્ટેમ્બર ૧૯૫૬માં નૅશના પિતા જ્હૉન નૅશ સિ.નું હૃદયરોગથી નિધન થયું. નૅશની પાસે ટેલિફોન ન હોઈને, તેમનાં માતાને જ્હૉન જુ. ને સમાચાર આપતાં વાર થઈ, પણ નૅશ તેમના પિતાની અન્ત્યવિધિમાં આવી શકેલા. ઇલીનૉરના કારણે તેમના પિતાનું નિધન વહેલું થયું હોય તેવું નૅશને લાગ્યું હશે ? જરૂરથી તેમનાં બા વિર્જિનિયાને તો લાગેલું જ.

અમેરિકામાં પરમેશ્વરનો આભાર માનવાનો દિવસ છે. આ દિવસ નવેમ્બર માસનો ચોથો ગુરુવાર. આને થેક્સગિવિંગ ડે (Thanksgiving Day) કહેવામાં આવે છે. મોટા ભાગના કુટુંબો આ દિવસો દરમિયાન એકબીજાને મળતાં હોય છે. આ દિવસો દરમિયાન ઍલિસિયા નેશના કુટુંબને મળવા Roanoke ગયાં. વિર્જીનિઆને ઍલિસિયા આકર્ષક અને ગૌરવવાળાં લાગ્યાં. વિર્જીનિઆ ઍલિસિયાની નેશ માટેની એકનિષ્ઠાથી પ્રભાવિત થયાં. ઍલિસિયાને ઘર કામમાં કોઈ રસ ન હતો.

ફેબ્રુઆરી ૧૯૫૭માં નેશ અને ઍલિસિયાનાં લગ્ન કેથોલિક વિધિ પ્રમાણે વૉશિંગ્ટનમાં ચર્ચમાં બંને જણાના એકબીજાના નજીકનાં સગાસંબંધીઓની હાજરીમાં થયેલાં. કોઈ ગણિતશાસ્ત્રી કે મિત્રો હાજર ન હતા. એપ્રિલ, ૧૯૫૭માં તેમના લગ્ન નિમિત્તે ન્યૂયૉર્કમાં તેમના ઍપાર્ટમેન્ટમાં પાર્ટી રાખેલી જેમાં કૂરાન્ટ ઇન્સ્ટિટ્યૂટ અને આઈએએસના મિત્રો અને સગાસંબંધીઓ આવેલા.

જુલાઈ ૧૯૫૭ પછી કૂરાન્ટ ઇન્સ્ટિટ્યૂટના બદલે આઈએએસમાં વધારે સમય કાઢવા માંડ્યો. ત્યાં ભૌતિકશાસ્ત્રીઓ અને ગણિતશાસ્ત્રીઓ સાથે આઇન્સ્ટાઈની હેયૂસેનબર્ગના (Heisenberg) અચોક્કસતાના નિયમની ટીકાઓની ચર્ચા કરેલી. આઈએએસના ડીરેક્ટર અને જાણીતા ભૌતિકશાસ્ત્રી ઓપનહાયમર (Oppenheimer) સાથે પણ ગંભીર ચર્ચા કરેલી અને તેમની પોતાની રીતભાતની માફી માગતો પત્ર જુલાઈ ૧૦, ૧૯૫૭માં લખેલો.

સપ્ટેમ્બર ૧૯૫૭માં એમઆઈટીમાં પાછા આવીને કૂરાન્ટ ઇન્સ્ટિટ્યૂટમાં જે કામ કરેલું તે લખવાનું શરૂ કર્યું, પણ કોઈ કોઈ જગ્યાએ સાબિતીઓ ખૂટતી હતી. આ સાબિતીઓ માટે ઘણા બધાની ઑફિસોના દરવાજા ખખડાવ્યા અને ઘણા બધાની મદદથી આ પેપર તૈયાર થયું અને ૧૯૫૮ના અમેરિકન જર્નલ ઑફ મેથેમેટિક્સમાં (American Journal of Mathematies ૮૦, No. ૪ (૧૯૫૮) : ૯૩૧-૫૪) છપાયું. યુનિવર્સિટી ઑફ ઉપ્સાલાના (Uppsala) પ્રોફેસર લિન્નાર્ટ કાર્લસનના (Lennart Carlson) કહેવા પ્રમાણે, ''આ કામ એટમ બૉમ્બ બનાવવા જેવું હતું.''

આટલી મોટી સફળતા મળ્યા પછી નેશે રીમાન્ન હાઈપોથિસિસ (Riemann Hypothesis) જે આડકતરી રીતે આપેલી પૂર્ણાંક સંખ્યા સુધીમાં કેટલા અવિભાજ્ય પૂર્ણાંકો છે તે બાબતની છે તેના ઉપર કામ શરૂ કર્યું જેમ કે,

૧થી ૧૦ સુધીના અવિભાજ્ય પૂર્ણાંકો : ૨, ૩, ૫, ૭

૧થી ૨૦ સુધીના અવિભાજ્ય પૂર્ણાંકો : ૨, ૩, ૫, ૭, ૧૧, ૧૩, ૧૭, ૧૯

૧થી ૩૦ સુધીના અવિભાજ્ય પૂર્ણાંકો : ૨, ૩, ૫, ૭, ૧૧, ૧૩, ૧૭, ૧૯, ૨૩, ૨૯ $\pi(x)$

ધારો કે સૂત્ર $\pi(x)$ મળ્યું, તો

સૂત્રમાં $p(10) = 4$, $\pi(20) = 8$, π(૩૦) = ૧૦ મળવા જોઈએ.

ઑગસ્ટ મહિનામાં (World Congress of Mathematies) વર્લ્ડ કૉંગ્રેસ ઑફ મેથેમેટિક્સ ઍડનબર્ગમાં (Edinburgh Scotland U.K.) મળવાની હોઈને નેશ જુલાઈ ૧૯૫૮માં કેમ્બ્રિજથી યુરોપ જવા નીકળ્યા. ન્યૂયૉર્કથી બોટમાં બંને જણ પૅરિસ ગયા ત્યાં તેમણે વપરાયેલી ઑલિવ-ગ્રીન રંગની મર્સિડીઝ ૧૮૦ (Mercedes ૧૮૦) ડીઝલ ખરીદી. બંને જણ આ ગાડીમાં સ્પેઈન, ઇટાલી અને બેલ્જિયમમાં ફર્યાં. ત્યાંથી સ્વીડન થઈને ઇંગ્લાંડ આવતા પહેલાં લન્ડ (Lund) અને સ્ટૉકહૉમમાં ફર્યાં. લંડનમાં ફેલિક્સ (Felix) અને ઈવા (Eva) બ્રૉવડર (Browder) જોડે રહીને ચારે જણ ગાડીમાં ઍડનબર્ગ આવ્યાં. મિલ્નરે (Milnar) જ્યારે અડધો કલાક આમંત્રિત ભાષણ આપ્યું, ત્યારે નેશે તેમના સ્વભાવ પ્રમાણે મોઢું ચઢાવેલું. જાણીતા ઓલ્ગા લેડીશેન્સ્કાવા (Olga Ladyshenskaya) જોડે મોટેથી દલીલો કરી.

બંને પણ ફૉલ ૧૯૫૮માં કેમ્બ્રિજ પાછા આવ્યાં અને નેશે ભણાવવાનું શરૂ કર્યું. એલિસિયાએ અડધા આનંદ અને અડધા ધ્રાસ્કા સાથે તે ગર્ભવતી છે તે શોધી કાઢ્યું. એલિસિયાને નોકરી અને પગાર બંને ગમતાં હતાં, એટલે એમની જ પસંદગી હોત તો થોડાંક વર્ષો રાહ જોઈ હોત, પણ નેશને બાળક તુરત જ જોઈતું હતું. નેશની નજરે લગ્નનો આશય જ બાળકો પેદા કરવાનો !! નેશને આ બાબતનો આનંદ હતો.

નેશ તેમના પોતના ભવિષ્યમાં તલ્લીન થયેલા હતા. માર્ટિને તેમને જાન્યુઆરીથી માર્ચ સુધીમાં નિર્ણયનું જણાવેલું. નેશને ખાતરી થયેલી કે તેઓ એમઆઈટીમાં

રહી શકે તેમ નથી. નૅશે પ્રો. ટકરને લખેલું કે તેઓ ગણિત વિભાગમાં વીનરની જેમ એકલા પડી જશે. તે નાનો ગણિતનો વિભાગ પસંદ કરશે જેમાં બધા લગભગ સરખા હોય. નૅશની બહેન માર્થાની યાદગીરી પ્રમાણે : નૅશને એમઆઈટીમાં રહેવાનો કોઈ આશય ન હતો, પ્રેસ્ટીજ માટે હાર્વર્ડમાં જવું હતું.

તકલીફો

યુનિવર્સિટી ઑફ શિકાગોએ ઘણા વખતથી કોઈ પ્રખ્યાત ગણિતશાસ્ત્રીને એન્દ્રી વાઈલના (Andre Weil) ગયા પછી લીધેલા ન હતા. નવા ગણિતવિભાગના વડા એન્ડ્રિઅન આલ્બર્ટને (Adrian Albert) પૈસા મળતાં નવા યુવાન ગણિતશાસ્ત્રીને સ્ટાફમાં ઉમેરવાનો વિચાર થયો. હાર્વર્ડના જ્હૉન થોમ્પસન અને જ્હૉન નૅશ ઉપર નજર ગઈ. નૅશને નોકરીની ઑફર આપવામાં આવી. આના જવાબમાં આલ્બર્ટનો ઑફર માટે ખૂબ જ આભાર માન્યો અને સાથે સાથે જણાવ્યું કે તેઓ એન્ટાર્કિટકાના (Antarctica) રાજા બનવાના હોઈને આ ઑફર સ્વીકારી શકે તેમ નથી.

અમેરિકન મેથેમેટિકલ સોસાયટીની કૉલમ્બિઆ (Columbia) યુનિવર્સિટીના સભાગૃહની મીટિંગમાં નૅશને સાંભળવા માટે ૨૫૦ ગણિતશાસ્ત્રીઓ આવેલા. નૅશ રીમાન્ન હાઇપોથિસિસ ઉપર ખૂબ જ અગત્યનાં પરિણામો જણાવશે તેવી મોટી અપેક્ષા સાથે તેમની ઓળખાણ કરાવી. શરૂઆતમાં નૅશનું ભાષણ સારું લાગ્યું, અડધા પછી તો કોઈનેય ગણિત જોડે બંધ બેસતું ભાષણ ન લાગ્યું. ખરેખર ઘણા બધા નિરાશ થયા અને બધાને લાગ્યું કે નૅશને કંઈક થયું છે !!

કેમ્બ્રિજ પાછા જતાં યેલ યુનિવર્સિટીના સભાગૃહમાં ભાષણ આપવાનો પ્રોગ્રામ હતો. સભાગૃહ જ માંડ શોધી શક્યા અને કૉલંબિયા યુનિવર્સિટીના જેવું જ બન્યું !!

બૅંકમાંથી બધી બચત ઉપાડી લઈને યુરોપ ચાલ્યા જવાની ઍલિસિયાને ધમકી આપતા. નૅશનો ખ્યાલ કોઈ આંતરરાષ્ટ્રીય સંસ્થા સ્થાપવાનો હતો. ઍલિસિયાના ઊંઘી ગયા પછી મોડી રાત સુધી લખતા જ હોય. સવારના તેમના મેજ ઉપર ભાતભાતના રંગોની સહીઓથી લખેલા પત્રો પડ્યા હોય. આ પત્રો ફક્ત યુ.નો.ને જ ઉદ્દેશીને લખેલા ન હતા, પણ જુદા જુદા દેશોના એલચીઓ, પોપ અને એફબીઆઈને (Federal Bureau of Investigation, FBI) લખેલા હતા.

ગણિત વિભાગની ટપાલમાં વિચિત્ર ટપાલો દેખાવા લાગી. જૉહ્ન નૅશના નામે દેશપરદેશના એલચીઓને લખેલા પત્રો હતા. ગણિતવિભાગના વડા ગભરાઈ ગયા. નસીબજોગે આ પત્રો ઉપર યોગ્ય ટિકિટો ન હોઈને, લગભગ બધા જ પત્રો પાછા આવ્યા.

ભણાવવાનું ચાલુ હતું, છતાંયે અડધી રાતે Roanoke જાન્યુઆરીની પંદરમી આસપાસ જવા નીકળી પડ્યા. ઍલિસિઆ માટે આ બધું અઘરું હતું.

જાન્યુઆરી ૧૯૫૯માં ગણિત વિભાગે નૅશને ટેન્યુર (Tenuer) આપી. ટેન્યુરનો અર્થ કાયમી રાખ્યા. થોડાંક અઠવાડિયાં પછી ગણિત વિભાગના વડા માર્ટિનને નૅશના 'માનસિક રોગોનો (Nerarous Breakdown)' ખ્યાલ આવ્યો. નૅશને ભણાવવાની રાહત આપી. આના કારણે એલિસિયાએ આશા રાખેલી કે એકદમ સારું થશે. કોઈ કોઈ વખત કોઈ જાતની તકલીફ ન હોય તેવા લાગતા. એપ્રિલ, ૧૯૫૯માં નૅશ એમની મર્સીડીઝમાં ઍલિસિયા સાથે વૉશિંગ્ટન જવા નીકળ્યા. વૉશિંગ્ટનમાં દરેક એલચીની ટપાલપેટીમાં તેમનો લખેલો પત્ર મૂકવાનો હતો. આ પ્રસંગ ઍલિસિયાને ખાતરી કરાવી ગયો કે નૅશના રોગનો ઉપચાર કરાવવો જરૂરી છે.

પૉલ કોહેન (Paul Cohen) પણ એમઆઈટીમાં ઇન્સ્ટ્રક્ટર હતા અને પૉલ નૅશના મિત્ર પણ હતા. નૅશે આવીને પૉલ કોહેનનું બારણું ખખડાવ્યું. નૅશને જોઈને ખાસ આશ્ચર્ય ન થયું. નૅશે કોહેનને પૂછ્યું કે તેમને મારી સાથે ફરવા આવવું છે. કોહેન હા પાડી. બંને જણ લગભગ એક કલાક એમઆઈટીમાં કૅમ્પસની આજુબાજુ ફર્યા. નૅશ વાતો કરે જતા હતા અને કોહેન સાંભળ્યે જતા હતા. બંને જણ છૂટા પડ્યા. કોહેનને ખબર પડી કે બે કેમ્બ્રિજના પોલીસો નૅશને પકડીને મેકલીન હૉસ્પિટલમાં (McLean Hospital) લઈ ગયા.

[અપૂર્ણ વધુ આવતા અંકે]

(ડૉ. વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ
નરસિંહજીના મંદિર પાસે, ઉવારસદ રોડ,
મુ. પો. શેરથા, તા. જિ. ગાંધીનગર,
મો. ૯૪૨૮૦૧૯૦૪૨)