પિયેર્રી ડી ફર્મા

વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ

પ્રસ્તાવના

ગણિતના ઇતિહાસમાં પ્રિયેર્રી ડી ફર્માનું સ્થાન શ્રેષ્ઠ ગણિતશાસ્ત્રીઓ જેવા કે આર્કિમિડિઝ, ન્યૂટન, ઑઇલર, ગૉસ વગેરે સાથે છે. તેઓ યામ ભૂમિતિના (Analytic geometry) શોધનારાઓમાંના એક હતા. તેમની કોઈ પણ વક્રના સ્પર્શક શોધવાની રીત અને વક્રના મહત્તમ અને લઘુતમ બિંદુઓ શોધવાની રીતોના કારણે વિકલન કલનગણિતના શોધક ગણાય છે. સંભાવનાશાસ્ત્ર – હાલના સંખ્યાશાસ્ત્રના નિર્માણ કરનારા પણ હતા. પ્રકાશશાસ્ત્રમાં (optics) પણ તેમનો શોધેલો નિયમ છે. ફર્માના છેલ્લા પ્રમેયથી (Lost Theorem of Fermat) તેઓ ખૂબ જ પ્રસિદ્ધ છે.

પ્રમેય : x, y અને z ની કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ નથી કે જે સમીકરણ $x^n + y^n = z^n$ ને સંતોષે. અહીંયાં $n > 2$ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે. ધારો કે $n = 3$ છે, તો સમીકરણ $x^3 + y^3 = z^3$ થાય. આનો અર્થ એ થયો કે કોઈ પણ સંખ્યાના ઘનને (cube) બે ધન સંખ્યાઓના સરવાળાથી દર્શાવી ન શકાય તે જ પ્રમાણે કોઈ પણ સંખ્યાના ચતુર્ઘાતની સંખ્યાને બે ચતુર્ઘાતી સંખ્યાનો સરવાળાથી દર્શાવી ન શકાય. આ જ રીતે કોઈ પણ સંખ્યાના n ઘાતની સંખ્યાને બે n-ઘાતની સંખ્યાના સરવાળાથી દર્શાવી ન શકાય. પ્રાકૃતિક સંખ્યા n બે કરતાં વધારે છે. ''આ પ્રમેયની ખૂબ જ સરસ સાબિતી મેં શોધી કાઢી છે, પણ કૌંસમાં ઓછી જગ્યાના કારણે આપતો નથી.'' તેમ ફર્માએ તેમની નોંધપોથીમાં લખેલું. સદીઓ સુધી ગણિતશાસ્ત્રીઓએ આ પ્રમેયની સાબિતી આપવા પ્રયત્ન કરેલો. આખરે ૧૯૯૫માં બ્રિટિશ ગણિતશાસ્ત્રી અને પ્રિન્સ્ટન યુનિવર્સિટીના ગણિતના પ્રોફેસર એન્ડ્રુ વાઇલ્સે (Andrew Wiles) એનાલ્સ ઑફ મેથેમેટિક્સમાં (Annals of Mathematics) સાબિતી આપી છે.

ફર્મા પોતે એકલા જ તેમને યોગ્ય લાગે તે પ્રશ્ન ઉપર કામ કરતા. આના કારણે ફર્મા વિશેની માહિતી ફર્મા પાસેથી જ મળે અને ફર્માને તેમના વિશે વાત કરવી જરાયે ગમતી ન હતી. અરે! તેમના વિચારો પણ જણાવવા ખાસ તૈયાર ન હોઈને તેમના વિશે બહુ જ ઓછું જાણવા મળે છે.

બાળપણ અને ભણતર

પ્રિયેર્રી ફર્માનો જન્મ બ્યુમોન્ટ-ડી-લોમાગ્ને (Beaumont-de-Lomagne), ફ્રાન્સમાં ૩૧ ઑક્ટોબર અને ૬ ડિસેમ્બર વચ્ચે ૧૬૦૧ કે ૧૬૦૭માં પંદરમી સદીના મેન્શનમાં (Mansion) થયેલો. તેમને ક્લીમેન્ટ (Climent) નામનો ભાઈ અને લૂઈઝ અને મેરિઆ (Louise and Maria) નામની બે બહેનો હતો. તેમના પિતાજી ડોમિનિક્યુ ફર્મા (Dominique Ferma) ચામડાના મોટા વેપારી હતા. તેમનાં માતા ક્લેર ડી લૉન્ગ (Claire de Long) પણ ખૂબ જ જાણીતા કુટુંબ (Familee de Long) ફેમિલી ડી લૉન્ગમાંથી હતાં. હાલમાં મળતા દસ્તાવેજો ઉપરથી કહી શકાય કે જેમ જેમ પિયેર્રે મોટા થતા ગયા તેમ તેમ કુટુંબ વધારે ને વધારે સમૃદ્ધ બનતું ગયું. બીજી કોઈ સાબિતી ન હોઈને ગણિતના ઇતિહાસકારો એમ માને છે કે કુટુંબ બ્યુમોન્ટમાં જ રહ્યું અને આથી પિયેર્રેનું બાળપણ, પ્રાથમિક અને માધ્યમિક શિક્ષણ ત્યાંની મોનેસ્ટરી ઑફ ગ્રાન્ડસેલ્વમાંથી (Monastery of Grandselve) મળ્યું. તેમના પિતાની માલમિલકત અને માતાની પૂર્વપીઠિકા જોતાં, પિએર્રેનું કાયદા માટેનું ભણવાનું કુદરતી જ છે. પૈસાની સાથે રાજકીય સામર્થ્ય મેળવવાનો આ શાહી રસ્તો છે. ૧૬૩૧ પહેલાં પિયેર્રે યુનિવર્સિટી ઑફ

ઑર્લીન્સમાંથી સિવિલ કાયદાની (University of Orlens) ડિગ્રી મેળવેલી.[1] તે સમયે ફ્રાન્સમાં ન્યાયાધીશની ઑફિસો વેચાતી જે આપણા માટે સ્વીકારવું અઘરું છે. તે સમયે ૪૩,૫૦૦ લિવ્રીસ (Livres) આપીને Offices of Conseiller au Parlement de Toulouse and Commissaire aux requetes du Palais કોઈ વિધવા બહેન જોડેથી ખરીદી. આવડી મોટી કિંમત તે આપી શક્યા તે કુટુંબની સંપત્તિ બતાવે છે. આટલું જ નહિ, પણ દહેજના ૧૨,૦૦૦ લિવ્રીસ આપીને લગ્ન પણ દૂરના સંબંધી જોડે કરેલાં. તેમના સસરાનું કુટુંબ પણ ખૂબ જ આગળ પડતું હોઈને તેમના નામ આગળ 'de' લખી શકેલા.

જેમ એમના બાળપણ વિશે વધારે જાણતા નથી તેમ તેમની પછીની જિંદગી વિશે ખાસ જાણી શકાયું નથી. હા, તેમને પાંચ બાળકો ક્લેમેન્ટ-સેમ્યુલ, જીન, ક્લેર, કેથરિન અને લૂઈઝ (clement-samual, Jean, Claire, Catherine and Louise) હતાં. સૌથી મોટા પુત્ર ક્લેમેન્ટ-સેમ્યુલ ફર્માની નજીક હતા અને તેમને ગણિતમાં રસ હતો. ફર્માના નિધન પછી ફર્માનાં બે પુસ્તકો Fermat's Observations on Diophantus (1670) અને Various Mathematical Works (1679)નું સંપાદન કરેલું. અને તેમને તેમના પિતાની ન્યાયાધીશની ઑફિસ વારસામાં મળેલી જે તેમણે તેમના પુત્ર જીન-ફ્રાન્કૉઇસને (Jaan-Francois) વારસામાં આપેલી. તે સમયના રીત-રિવાજ પ્રમાણે કુટુંબની No blesse de robe કાયમી રહી.

ફર્મા તેમના જીવન દરમિયાન ત્રણ નગરો (Towns) જોડે સંકડાયેલા હતા. ૧૬૩૧ પછી તેમનું રહેવાનું મુખ્ય સ્થળ ટૂલૂઝ (Towlouse) હતું. જ્યો પાર્લામેના (ફ્રેન્ચ : Parlement)ના સલાહકાર (ફ્રેન્ચ : Consciller) હતા.[2] બ્યુમોન્ટ માટે લાગણી અને ધ્યાન હતાં અને કોઈ કોઈ વખત ત્યાંની Conseill general ના પ્રમુખ તરીકે રહ્યા. ત્યાંના રોજિંદા કાયદાઓને બરાબર ગોઠવી આપ્યા. આ ઉપરાંત બ્યુમોન્ટના કાયદેસરના સલાહકાર તરીકે કામ કર્યું. આ ઉપરાંત કોઈ કોઈ વખત કેસ્ટ્રિસ (Castres) જતા અને 1632થી તેમનું નિધન થયું ત્યાં સુધી ત્યાંના Chambre de l'Edit ના સભ્યા હતા. તેમનું નિધન ૧૨ જાન્યુઆરી ૧૬૬૫ના રોજ કેસ્ટ્રિસમાં થયું.

ફ્રાન્સમાં તે જમાનામાં પાર્લામે (Parlement) અપીલોને સાંભળનાર કૉર્ટ (Appellate court) હતી. ૧૭૮૯માં ફ્રાન્સમાં દરેક પ્રોવીન્સમાં એક એમ કુલ તેર parlement હતી. Parlement de Toulouse ના ફર્મા સભ્ય હતા. ૧૬૩૮માં ચેમ્બર ઑફ કૉમર્સના (Chamber of Commerce) સભ્ય બન્યા અને ૧૬૫૨માં ગ્રાન્ડ ચેમ્બરના, જે ગુનાવાળા કિસ્સાઓનાં ચુકાદામાં અગત્યનો ભાગ ભજવતી, સભ્ય બન્યા.

સોળમી અને સત્તરમી સદીમાં ભાતભાતનું ગણિત હતું અને ભાતભાતના ગણિતશાસ્ત્રીઓ હતા. નેપિયર બ્રિટિશ ઉમરાવ હતા. ટાર્ટાગ્લિઆ ટપાલ ખાતાના ઘોડાના અસ્વારનો ગરીબ દીકરો, રોમન કેથોલિક સોસાયટીના ઊંચા હોદ્દેદાર ક્લેવિઅસ, સાદા સાધુ કેવેલિરિ (Cavalieri), ફર્મા અને ડેકાર્ટ જેમને પૈસાની જરાયે ચિંતા ન હતી, જ્યારે ગૅલિલીયોને કોઈ દિવસ પૈસાની ખેંચ ન પડી હોય તેવું ન હતું. આ બધાય એકબીજાથી જુદા પ્રકારનું ગણિત ગણતા, કારણ કે દરેકનો આશય જુદો હતો. બહુ જ ઓછા તેમના ખાવાપીવા માટે ગણિત ઉપર આધાર રાખતા. ફર્મા પણ તેવા જ ગણિતશાસ્ત્રી હતા. તેમના ગણિતના કામ માટે તેમને કોઈનેય જવાબ આપવાનો ન હતો. તેમના ગણિતની સફળતા કે નિષ્ફળતા તેમના સિવાય બીજા કોઈનેય અસર ન કરતી. ફર્માને ગણિતનું કામ પ્રસિદ્ધ કરવાનો ખાસ ખ્યાલ ન હોઈને, તેમનું કામ ફક્ત મિત્રોને લખેલા પત્રો અને તેમના પુસ્તક "Arithmatic of Diophantus"ના હોશિયામાં લખાયેલી નોંધો ઉપરથી મળે છે. વકીલ હતા અને પ્રોવિન્સિઅલ (રાજ્યના જેવું) સુપ્રીમ કૉર્ટના સભ્ય હતા. તેમને ગણિત ખૂબ

૧. યુનિવર્સિટીની સ્થાપના ૧૨૨૯માં થયેલી. ૧,૦૩,૦૦૦ વિદ્યાર્થીઓ આ યુનિવર્સિટીમાં ભણે છે અને બે નોબેલ પ્રાઇઝ મેળવનારા અધ્યાપકો પણ છે. **૨.** હાલમાં ટૂલૂઝ મેટ્રો વિસ્તાર ફ્રાન્સનો ચોથા નંબરનો વિસ્તાર ગણાય છે. હાલની યુરોપની (એરબસ) Airbus નું મોટું કેન્દ્ર છે. ત્યાં એરબસની ઉત્પાદનની મોટી ફેક્ટરી પણ છે.

ગમતું અને ગણિતની પાછળ ગાંડા હતા. સુપ્રીમ કૉર્ટના ન્યાયાધીશ તરીકે વધારે પડતું કામ હોઈને તેમને ગમતા કામ માટે સમય કાઢી શકતા અને કદાચ કુદરતી બક્ષિસ પણ ગણિત માટે હોય!!

૧૬૨૯માં તેમણે યામ ભૂમિતિ (Coordinate Geometry) શોધેલી અને તેમના વિચારો 'Introduction to Plane and Solid loci' નામની પુસ્તિકામાં છપાયેલા પણ ડેકાર્ટને ૧૬૩૭માં તેમના પ્રખ્યાત પુસ્તક, 'Discourse on Method'ના પરિશિષ્ટમાં તેમના વિચારો પ્રસિદ્ધ કરવા માટે યામ ભૂમિતિની શોધનો યશ તેમને મળે છે, પણ જેને આપણે યામ ભૂમિતિ ગણીએ છીએ તેમાંનું કંઈ આ પરિશિષ્ટમાં જોવા મળશે નહિ. હા, તેમાં બીજગણિત કઈ રીતે વાપરવું તે જાણવા મળશે. જ્યારે ફર્માએ બે લંબધરીઓ (આપણી જેમ નહિ) દાખલ કરી અને સુરેખા, વર્તુળ, પરવલય, ઉપવલય (Ellipse), અતિવલય (Hyperbola)નાં સમીકરણો મેળવ્યાં. અને બતાવ્યું કે કોઈ પણ દ્વિઘાત સમીકરણ ઉપરના વક્રો બતાવશે. આમાંનું કંઈ પણ ડેકાર્ટના પરિશિષ્ટમાં જોવા મળશે નહિ.

મહત્તમ અને લઘુતમ કિંમતો

ફર્માનો લેખ "On the Method for the Evaluation of Maxima and Minima" જે A Source Book in Mathematics, 1200-1800 (1969) edited by D. J. Struik માં છે. તેના આધારે નીચેની રીતો આપેલી છે.

લઘુતમ અને મહત્તમ કિંમતોના મૂલ્યાંકન માટે આપણે બે અજાણી રાશીઓ (quantities) અને નીચેના નિયમો ધારીશું :

આપેલો પ્રશ્ન લઘુતમ કે મહત્તમ કિંમત a મેળવવાનો છે. અહીંયાં a લઘુતમ કે મહત્તમ કિંમત છે. હવે આપણે અજાણ્યા a ની જગ્યાએ $a + e$ લઈને મહત્તમ કે લઘુતમ કિંમતોને $a + e$ માં દર્શાવેલી મહત્તમ કે લઘુતમ કિંમતો a કે $a + e$ માં દર્શાવેલી સરખી હોઈને, સરખી ગણતાં સમીકરણ મળશે. સરખી કિંમતો બાદ કરતાં આપણને e અને e ની ઘાતોમાં સમીકરણ મળશે. $e \neq 0$ ન હોઈને આ સમીકરણને e વડે ભાગતાં e વગરની અને e વાળી એમ બે જાતની રકમો મળશે. e વગરની રકમોમાંથી a ની કિંમત મળશે.

ઉદાહરણ : સુરેખા AC આપેલી છે. AC ના e બિંદુથી બે ભાગ કરો કે જેથી AE × EC મહત્તમ હોય.

આકૃતિ 1

આપણે AC = b લઈએ. ધારો કે AE = a છે. આથી EC = AC − AE = $b - a$ છે.

AE × EC = $a(b - a) = ab - a^2$ છે. આપણે આની મહત્તમ કિંમત મેળવવાની છે. આ સમીકરણમાં a ની જગ્યાએ $a + e$ મૂકીએ, એટલે કે AE = $a + e$ લઈએ, તો EC = AC − AE = $b - a - e$ થાય. આથી,

AE × EC = $(a + e)(b - a - e) = ab + be - a^2 - 2ae - e^2$ છે.

બંને કિંમતો સરખી હોઈને,

$ab - a^2 = ab + be - a^2 - 2ae - e^2$ છે.

$be - 2ae - e^2 = 0$

$e \neq 0$ વડે ભાગતાં

$b - 2a - e = 0$. e ની કિંમત શૂન્ય ભણી લઈએ તો $b - 2a$ ની કિંમત શૂન્ય ભણી જશે.

આથી, $b = 2a$ એટલે કે $a = b/2$ થાય.

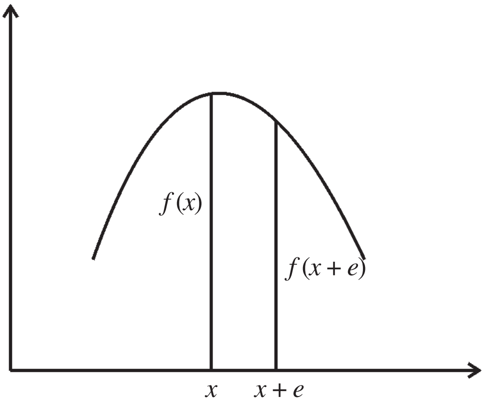
E ને AC ના મધ્યબિંદુએ લેવાથી AE × EC મહત્તમ થશે.

આ રીતની પાછળનું કારણ ફર્માએ આપેલું ન હોઈને ઘણા બધાના માટે સમજવું અઘરું હતું. ધારો કે $f(x)$ ની આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે મહત્તમ કિંમત x બિંદુએ છે. x ની આસપાસ f ની કિંમત પ્રમાણમાં બહુ જ ઓછી બદલાતી હોઈને,

$$f(x + e) \approx f(x)$$

$$\therefore \quad f(x + e) - fx\ (x) \approx 0$$

f બહુપદી વિધેય હોઈને $f(x + e) - f(x)$ ને e વડે ભાગી શકાય, આથી,



આકૃતિ 2

આપણને $\frac{f(x \quad e) \quad f(x)}{e} \approx 0$

જેને આપણે $= f(x)$ બરાબર ઓળખીએ છીએ.

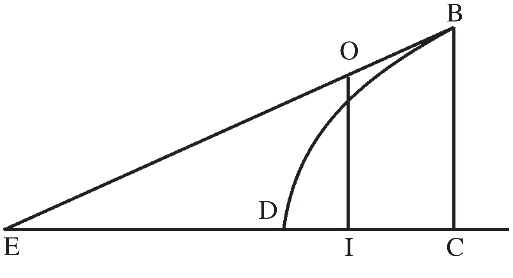
સ્પર્શક

કલનગણિતની શોધ માટે આપણે ન્યૂટન અને લાઇબ્નિઝને યશ આપીએ છીએ. પણ જો વિકલન ફક્ત સ્પર્શક અને મહત્તમ અને લઘુતમ બિંદુઓ જ હોય, તો તેનો યશ ફર્માને મળે છે. $\lim \frac{f(x \quad e) \quad f(x)}{e}$

આ જ રોજ ફર્માનું મોટું પૂતળું ટૂલૂનની હોટલ ડી વિલ્લીમાં છે અને પૂતળાની નીચે લખેલું છે, "Pierre de Ferment, father of differential calculus." ૧૯૩૪ માં ન્યૂટનનો જૂનો પત્ર મળ્યો અને તેમાં ન્યૂટન જણાવે છે કે તેમને કલનગણિતનો વિચાર, "ફર્માની સ્પર્શકો દોરવાની રીતો ઉપરથી આવેલો." ફર્માના પહેલાં બહુ જ ઓછા વક્રો હોઈને કોઈએ, ગંભીરતાથી તેના સ્પર્શકોનો વિચાર કરેલો નહિ, નવી યામ ભૂમિતિના કારણે ઘણા બધા વક્રો અને તેમનાં સમીકરણો ફર્મા જાણતા હોઈને તેમના સ્પર્શકોનો પ્રશ્ન ઊભો થશે.

ફર્માએ સ્પર્શકો મેળવવાની રીત આપેલી છે. તે જોઈએ.

આપેલા વક્રના આપેલા બિંદુએ સ્પર્શક મેળવવા માટે બીજી કોઈ શરત શોધવાની રહી. પહેલી શરત તો તે સ્પર્શક આપેલા બિંદુમાંથી પસાર થવો જોઈએ. બીજું બિંદુ જેમાંથી આ સ્પર્શક પસાર થાય અથવા તો આ સુરેખ અક્ષ જોડે કેટલો ખૂણો તે જાણીએ તો પણ ચાલે. આકૃતિ ૧માં BD એ આપેલો પરવલય છે અને CE x-અક્ષ છે. B બિંદુએ દોરેલો સ્પર્શક x-અક્ષને E બિંદુએ છેદે છે. BD બહિર્મુખ (canvex) હોઈને B અને E વચ્ચે લીધેલું બિંદુ O પરવલયની ઉપર છે. પરવલય હોઈને $CD = BC^2$ અને $DI < IO^2$. આથી.



આકૃતિ 3

$\frac{CD}{DI} >$.

Δ^5 OEI અને BEC સમરૂપ હોઈને,

$\therefore \quad \frac{CD}{DI} >$

CD = g, CE = x અને CI = y લઈએ, તો EI = EC − IC = $x - y$ થશે અને આ કિંમતો

$>$ માં સૂકતાં,

$>$

$\therefore \quad g(x^2 - 2xy + y^2) > x^2(g - y)$

$\therefore \quad -2gxy + gy^2 > -x^2y,\ y > 0$ હોઈને

$\therefore \quad -2gx + gy > -x^2$

$\therefore \quad x^2 > 2gx - gy.$

y ની બધી જ કિંમતો માટે આ સાચું હોઈને,

$x^2 \geq 2gx$

$\therefore \quad x(x - 2g) \geq 0$

બધી જ $x > 0$, માટે $x \geq 2g$.

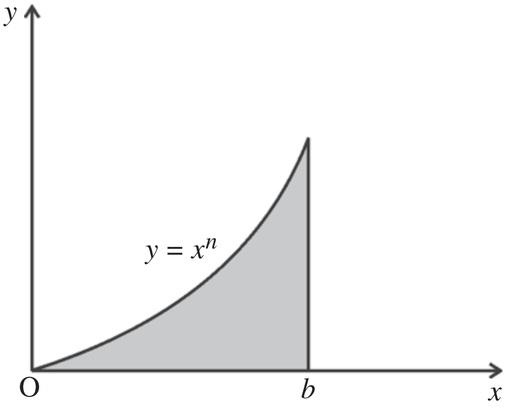
સ્પર્શક BE ને B તરફ લંબાવીએ અને તેના ઉપર B થી આગળ O બિંદુ લઈને આ જ પ્રમાણે ગણતાં સાબિત કરી શકાય કે $x \leq 2g$ છે. આથી, $x = 2g$ થાય. આથી સ્પર્શક ઉપર બિંદુ E($2g$, 0) મળ્યું.

ક્ષેત્રફળ

ફર્માએ વક્ર $y = x^n$ અને x-અક્ષ વચ્ચેનું $x = 0$ થી $x = b$ સુધીનું ક્ષેત્રફળ શોધેલું. અહીંયા n ધન પૂર્ણાંક છે. આ ક્ષેત્રફળ હાલની સંકેતલિપિમાં (Notations)

= = છે.

n = 0, 1, 2,..., 9 લઈને ઇટાલિયન ગણિતશાસ્ત્રી કેવેલિરિએ (Cavalieri) આ સૂત્ર સાબિત કર્યું, પણ n = 10 માટે ખૂંચી ગયા.

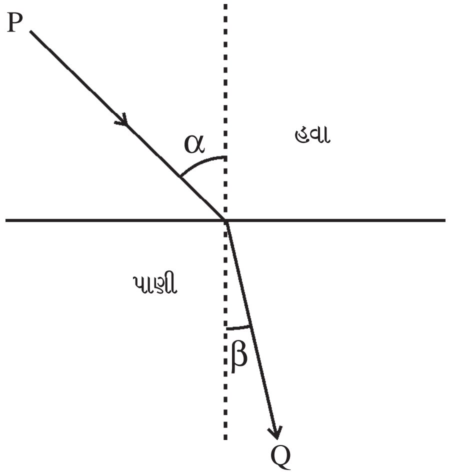


આકૃતિ 4

વક્રીભવન (Refraction)

આપણે બધાય જાણીએ છીએ કે પ્રકાશનું કિરણ એક માધ્યમથી બીજા માધ્યમમાં જાય ત્યારે આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે સીધું જવાના બદલે વાંકું વળે છે. હવામાંથી પ્રકાશનું કિરણ પાણીમાં જાય છે, ત્યારે લંબ તરફ વાંકું વળે છે. લંબની જોડે α ખૂણો બનાવતું કિરણ પાણીમાં પેસતાં જ લંબ જોડે α ખૂણો બનાવવાના બદલે α થી નાનો ખૂણો β બનાવે છે. ડચ વિજ્ઞાની સ્નેલે (Snell) પ્રયોગ દ્વારા શોધી કાઢેલું કે,

$$\frac{sin}{sin} = \text{અચળ}$$



આકૃતિ 5

આમ શાથી બને છે તેનો તેમને ખ્યાલ ન હતો. ડિસેમ્બર ૧૬૩૭માં ડેકાર્ટે (સ્નેલના કામનો ખ્યાલ ન પણ હોય) નીચેનો નિયમ આપ્યો

=

જ્યાં, v_e પ્રકાશની હવામાં ગતિ અને v_u પ્રકાશની પાણીમાં ગતિ દર્શાવે છે. સાબિત કરવા માટે $v_u > v_e$ માનીને દલીલ કરી. જ્યારે ફર્માએ પ્રકાશનું કિરણ P થી Q સુધી ઓછામાં ઓછા સમયમાં મુસાફરી કરે છે તેમ ધારીને (લઘુતમ કિંમત મેળવીને) સાબિત કરી શકેલા કે

$\frac{sin}{sin}$ = . આ ફર્માના ઓછામાં ઓછા સમયના નિયમ તરીકે ઓળખાય છે. ઓછામાં ઓછા સમયનો નિયમ ઑઇલર અને લગ્રાન્જને Calculus of Variations વિકસાવવા પ્રેરેલા. આ જ રીતે હામિલ્ટને (Hamilton) પણ ભૌતિકશાસ્ત્રમાં Principle of Least action વિકસાવ્યો.

૧૬૫૪માં ફર્મા અને પાસ્કલે તેમના પત્રોથી સંભાવના સિદ્ધાંતનો (Probability Theory) પાયો નાખ્યો. બિંદુઓના પ્રશ્ન ઉપરના બંનેના સાથેના કામને કારણે બંને જણ સંભાવના શાસ્ત્રના સ્થાપક ગણાય છે.

આ લેખ નીચેનાં પુસ્તકોના આધારે લખ્યો છે :

(૧) M. S. Mahones, The Mathematical Career of Pierra de Fermat, Princeton University Press, 1994

(૨) G. F. Simmons, Calculus Gems, Brief Lives and Memorable Mathematics, The Mathematical Association of America, 2007

વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ
'સ્વરાજ', નરસિંહજી મંદિર પાસે, ઉવારસદ રોડ,
મુ.પો. શેરથા, તા.જિ. ગાંધીનગર
મો. ૯૪૨૮૦ ૧૯૦૪૨