કેરાલાની ગણિત અને ખગોળશાસ્ત્રની શાળા

વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ

પ્રસ્તાવના

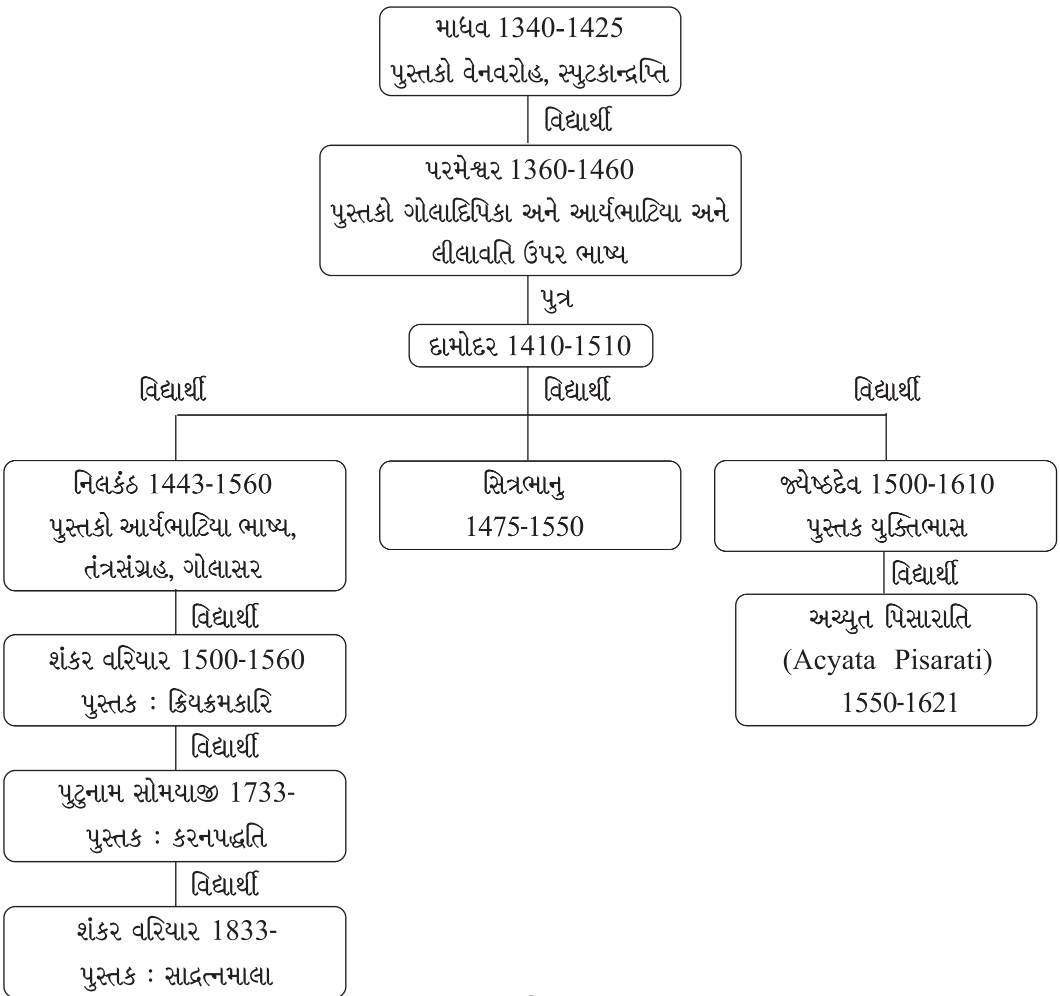
ગણિતશાસ્ત્રના ઇતિહાસકારો એવું માનતા કે ભાસ્કર (1114-1185) પછી કોઈ ભારતીય ખગોળશાસ્ત્રી કે ગણિતશાસ્ત્રી થયું નથી. 1832માં ચાર્લ્સ એમ. વિશે (Charles M. Whish) માધવ અને તેમના વિદ્યાર્થીઓએ શ્રેણી (Series) ઉપર કરેલા કામ વિષેનો લેખ Transactions of the Royal Asiatic Society of Great Britian and Ireland માટે લખ્યો ત્યારે ખ્યાલ આવ્યો કે ભાસ્કર પછી અંત આવ્યો નથી. વિશ બ્રિટિશ સિવિલ અધિકારી હતા અને ભારત વિષેનું સારું જ્ઞાન ધરાવતા હતા. સો વર્ષ સુધી આની કોઈએ નોંધ લીધી નથી. 1940માં ફરીથી ઊંડાણપૂર્વક આ બધાનો અભ્યાસ પ્રો. સી. ટી. રાજગોપાલ, તેમના સહાધ્યાયીઓ અને તેમના વિદ્યાર્થીઓએ શરૂ કર્યો. સાથે સાથે કે. વી. સર્માનું (K. V. Sarma) પુસ્તક, ‘‘A History of the Kerala School of Hindu Astronomy’’ 1972માં પ્રસિદ્ધ થયું. ભારતીય ગણિત-શાસ્ત્રીઓ અને ખગોળશાસ્ત્રીઓના કામની યોગ્ય કદર થાય તે માટે એકલા હાથે લડનાર મૂળ કેરાલાના પ્રો. જ્યોર્જ ગેવેરગેસ જૉસેફ (George Gheverghese Joseph)નાં બે પુસ્તકો, ‘The crest of the Peacock’ અને ‘Indian Mathematics’ ખૂબ જ અગત્યનાં છે. ખરેખરભારતસરકારેતેમનાકામનીકદરકરીને ‘પદ્મશ્રી’થી સન્માનવા જોઈએ.

આકૃતિ 1

આકૃતિ 1માં બતાવેલા કેરાલા રાજ્યની કોચીન શહેરથી થોડાક કિલોમીટરના અંતરે આવેલા સંગમગ્રામ (Sangamgram)ના બકુલ વિહારમાં માધવે (1340-1425) ગણિત અને ખગોળની શાળા સ્થાપેલી. માધવ વિષેની થોડીક માહિતી જાણીતી છે. તેઓ કર્ણાટકના દરિયા કિનારાના વિભાગમાંથી આવ્યા હતા અને એમ્પ્રાન્તિરિ

(Emprantiri) બ્રાહ્મણ હતા જે નામ્બુથિરિ (Nambuthiri) બ્રાહ્મણ કરતાં નીચા ગણાય. આખરે એમ્પ્રાન્તિરિ નામ્બુથિરિની પેટા જ્ઞાતિ બની અને તેમના લખેલા પુસ્તક 'વેનવરોહા' (Venvaroha)માં તેમની ગામની અને ઘરની માહિતી આપેલી છે. તેમનું સંગમગ્રામ હાલમાં ઇરિન્જાલકુડા (Irinjalkuda)ના નામથી ઓળખાય છે અને કોચીનની નજીક આવેલું છે. તેમના ઘરનું નામ 'બકુલાધિસ્થિત્ વિહારમ્' સંસ્કૃતમાં અને 'ઇલેઇનિન્નાપલ્લિ' (Ilaininnapalli) મલાઈ ભાષામાં હતું. ઈલ્લામ (Illam) એ તામિલ શબ્દ છે, જેનો અર્થ મોટા આંગણા સાથેનું મકાન. તે સમયના ગણિતશાસ્ત્રીઓ અને ખગોળશાસ્ત્રીઓ ઇલ્લામમાં જ રહેતા અને વિદ્યાર્થીઓને ત્યાં જ ભણાવતા. વિદ્યાર્થીઓ ઈલ્લામમાં જ રહેતા. માધવનું ગામ સાતમી અને આઠમી સદીના બ્રાહ્મણો માટેનાં વસવાટનાં 32 ગામોમાંનું એક ગામ હતું. માધવનું મોટા ભાગનું ગણિતનું કામ અદૃશ્ય થઈ ગયું છે જ્યારે ખગોળશાસ્ત્રનું કામ બચી ગયું છે.

આકૃતિમાં 2માં આ શાળાના અગત્યના વિદ્યાર્થીઓ આપ્યા છે, જેમણે તે સમયે અગત્યનાં પુસ્તકો લખેલાં.



આકૃતિ 2

દામોદર પરમેશ્વરના પુત્ર હતા. દામોદરના બે પ્રસિદ્ધ વિદ્યાર્થીઓ નિલકંઠ અને જ્યેષ્ટદેવ હતા. નિલકંઠના લખવા પ્રમાણે પરમેશ્વર માધવ પાસેથી ઘણું બધુ શીખેલા. નિલકંઠ સો વર્ષથી વધારે જીવેલા અને આખી જીંદગી ઘણા વિદ્યાર્થીઓને શીખવેલું. જેમાંના ઘણા તે સમયના નામાંકિત વિદ્વાનો બનેલા. નિલકંઠ અને દામોદરનો વિદ્યાર્થી જ્યેષ્ઠદેવ જેણે કેરાલા સ્કુલનું અગત્યનું પુસ્તક 'યુક્તિભાસ (Yuktibhasa)' લખેલું. કેરાલાના તે સમયના ખગોળશાસ્ત્રીઓ જે બધાં પ્રમેયો અને સૂત્રો વાપરતા તે 'યુક્તિભાસ'માં છે. આ બધાં પ્રમેયો અને સૂત્રોની વ્યુત્પત્તિઓ (Derivations) 'યુક્તિભાસ'માં છે.

માધવ પછીના ગણિતશાસ્ત્રીઓ અને ખગોળશાસ્ત્રીઓ પરમેશ્વર, નિલકંઠ અને જ્યેષ્ઠદેવના પુસ્તકો ઉપરથી એવું જણાય કે માધવે $sin\ x$, $cos\ x$ π અને $tan^{-1}\ x$ની ઘાત શ્રેણીઓ મેળવેલી જે ન્યૂટન અને લાઇબ્નિઝના 200 વર્ષ પહેલાં મેળવેલી.

'યુક્તિભાસ'ના બે ભાગ છે. પહેલો ભાગ ગણિતનો છે. તેમાં માધવની મેળવેલી ઘાત શ્રેણીઓ પણ છે. બીજો ભાગ ખગોળશાસ્ત્રનો છે.

યુક્તિભાસ 1530ની આસપાસ નિલકંઠના 'તંત્ર સંગ્રહ'ને લંબાણપુર્વક સારી રીતે સમજાવવા લખાયેલું. 'યુક્તિભાસ'નું અંગ્રેજીમાં ભાષાંતર કે. વી. સર્માનું 2008માં પ્રસિદ્ધ થયું છે, પણ ખૂબ જ મોંઘું છે. એમેઝોન.કોમ ઉપર મળે છે. યુક્તિભાસ લગભગ ચારસો વર્ષ લોકપ્રિય પુસ્તક હતું. 'યુક્તિભાસ'ની મલયાલમ ભાષામાં લખાયેલાંની પ્રતો કેરાલામાં ઘણી લાયબ્રેરીઓમાં સરસ રીતે સાચવી રાખવામાં આવેલી છે. આ પ્રતો ઉપરથી સંસ્કૃતમાં થયેલું ભાષાંતર Indian Institute of Advanced Study એ પ્રસિદ્ધ કર્યું છે. યુક્તિભાસની શરૂઆતમાં કોઈ જગ્યાએ લેખકનું નામ નથી; પણ બીજી ઘણી જગ્યાએથી મળતા પુરાવા પરથી કહી શકાય કે જ્યેષ્ઠદેવે આ પુસ્તક લખેલું. જ્યેષ્ઠદેવનું કૌટુમ્બિક ઘર હજુયે અલટુર અને ટ્રક્કાન્ટિયુર (Alattur and Trakkantiyar)ની નજીકમાં છે.

sine and cosineની ઘાત શ્રેણીઓ (Power Series) :

'યુક્તિભાસ'માં માધવની સાઇન શ્રેણીની વ્યુત્પત્તિ (derivations) આપેલી છે. 'તંત્ર-સંગ્રહ'માં લેખક નીચેના શ્લોકથી શરૂઆત કરે છે.

निहत्य चापवर्गेण चापं ततत् फलानि च।
हरेत् समूलयुगवर्गेस्विज्याव गॉहतैः क्रमात्।
चॉप फलानि चाधोऽधौ न्यस्योपर्युपरि त्यजेत् जीवाप्त्यै...

સાર : ચાપ a પહેલી રકમ છે. ચાપને ચાપના વર્ગથી ગુણીને જે મળે તેને પહેલી બેકી સંખ્યાના વર્ગને તે સંખ્યાથી વધારીને જે મળે તે સંખ્યાને r^2 વડે ગુણતાં જે મળે તેનાથી ભાગતાં

બીજી રકમ = $\frac{a \cdot a^2}{(2^2 \quad 2)r^2} = \frac{a^3}{3!\,r^2}$ મળે.

આ જ રીતે ત્રીજી રકમ મેળવો. એટલે કે બીજી રકમને ચાપના વર્ગથી ગુણતાં જે મળે તેને બીજી બેકી સંખ્યાના વર્ગને તે સંખ્યાથી વધારીને જે મળે તેને r^2 વડે ગુણતાં જે મળે તેનાથી ભાગતાં,

ત્રીજી રકમ = $\cdot$ $= \frac{a^5}{5!\,r^4}$ મળે.

આ જ રીતે શ્રેણીની બીજી રકમો મેળવો.

છેલ્લે બેકી રકમોનો સરવાળો એકી રકમોના સરવાળામાંથી બાદ કરતાં *sine* ના ચાપ r ની કિંમત મળે એટલે કે,

sin જ્યા = જ્યા $\theta = a -$ $+$ $-$ $+ \ldots$

$a = r\theta$ હોઈને

sin જ્યા = જ્યા $\theta = r \ sin\, \theta = r\theta -$ $+$ $-$ $+ \ldots$

$\therefore \quad sin\, \theta = \theta -$ $+$ $-$ $+ \ldots$ છે.

આ જ પ્રમાણે $r\,(1 - cos\, \theta)$ ની શ્રેણી 'તંત્ર-સંગ્રહ'ના નીચેના શ્લોકમાં આપી છે :

निहत्य चापवर्गेण रुपं ततत् फलानि च।
हरेत् विमूलयुग्वर्गेस्निज्यावर्गहतैः क्रमात्।
किन्तु व्यासदलेनैव द्विघ्नेनाघं विभज्यताम्।
फलान्यधोऽधःक्रमशो न्यस्योपर्युपरि त्यजेत्।
शराप्त्यै...

પહેલી રકમ : ચાપના વર્ગને $2r$ વડે ભાગો એટલે કે પહેલી રકમ = .

બીજી રકમ : પહેલી રકમને ચાપના વર્ગથી ગુણીને જે મળે તેને બે કરતાં વધારે પહેલી બેકી સંખ્યાના $\frac{a^2}{(\;\;4)\,r^2}$ વર્ગને તે સંખ્યાથી ઘટાડીને જે મળે તેને r^2 વડે ગુણીને ભાગતાં

બીજી રકમ : . $= \frac{a^4}{4!\,r^3}$

ત્રીજી રકમ : . $= \frac{a^6}{6!\,r^5}$

બેકી રકમનોનો સરવાળો એકી રકમોના સરવાળામાંથી બાદ કરતાં

ઉત્તક્રમજ્ય $\theta = r\,(1 - cos\, \theta) =$ $-$ $+$ $-$ $+ \ldots$

$a = r\theta$ મૂકતાં,

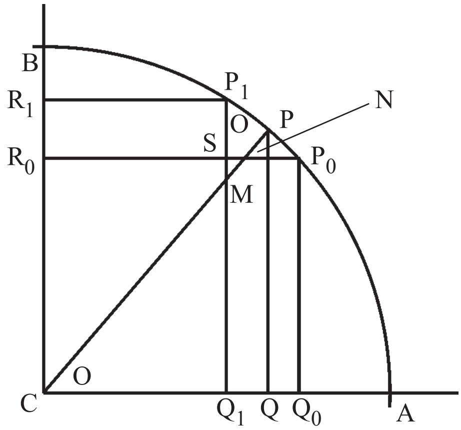
$r\,(1 - cos\, \theta) =$ $-$ $+$ $-$ $+ \ldots$

$\therefore \quad cos\, \theta = 1 -$ $-$ $+$ $+ \ldots$

આ *sine* અને *cosine* ની ઘાત શ્રેણીઓ છે તે માધવે મેળવેલી. આ ન્યૂટન અને લાઇબ્નિઝે માધવના મેળવ્યા પછી બસો વર્ષે મેળવેલી.

આ શ્રેણીઓ મેળવવા માટે નીચેનાં પરિણામોની જરૂર પડતી હોઈને તે પરિણામો મેળવીશું. આ પરિણામો 'યુક્તિભાષા'ના 165 અને 173માં પાનાઓમાં છે તેમજ નિલકંઠ સોમયાજીના 'આર્યભાટિયા-ભાષ્ય'ના ગણિતપાડા વિભાગમાં પાન 48-50 માં છે.

(1) $d(r\, sin a) = r\, cos a$ (2) $d\,(r\, cos a) = r\, sin a$



આકૃતિ 4

AB વર્તુળની ચતુર્ભુજ ચાપ છે અને વર્તુળનું કેન્દ્ર C અને ત્રિજ્યા R છે. ચાપ $AP_0 = a$ માં થોડોક વધારો ચાપ $P_0P_1 = da$ છે. આકૃતિ 4માં સ્પષ્ટ દેખાય તે માટે P_0P_1 મોટી બતાવાઈ છે. P ચાપ P_0P_1 નું મધ્યબિંદુ છે. P_0Q_0, PQ, P_1Q_1, P_0, P અને P_1 માંથી CA ઉપર દોરેલો લંબો છે. એ જ રીતે P_0R_0, P_1R_1, P_0 અને P_1 માંથી CB ઉપર દોરેલા લંબો છે. CP, P_1Q_1 ને M બિંદુએ અને P_0P_1 ને N બિંદુએ છેદે છે. P_1Q_1 અને P_0R_0 S બિંદુએ છેદે છે.

Δ^S P_1NM અને CMQ_1 માં

$\angle P_1MP = \angle CMQ_1$ (સામસામેના ખૂણાઓ)

$\angle P_1NM = \angle MQ_1C = 90^o$

$\therefore$ Δ^S P_1NM અને CMQ_1 સમરૂપ (similar) છે.

$\therefore$ $\angle Q_1CM = \angle MP_1N$

હવે Δ^S P_0SP_1 અને CPQ માં

$\angle PCQ = \angle SP_1P_0$

$\angle PQC = \angle P_1SP_0 = 90^o$

$\therefore$ Δ^S P_0SP_1 અને CPQ સમરૂપ છે.

$$\therefore \quad \frac{P_1S}{CQ} = \qquad =$$

આથી, $P_1S =$ અને $P_0S = \dfrac{PQ \cdot P_0P_1}{CP}$

આકૃતિ 4 માં બતાવેલી ચાપ P_0P_1 બતાવ્યા કરતાં ખૂબ જ નાની હોઈને, ચાપ P_0P_1 બરાબર જીવા P_0P_1 લઈ શકીએ અને P એ સાઇન જીવા અને *cosine* જીવા બરાબર P_0 એની *sine* જીવા અને *cosine* જીવા થાય. આથી,

$$P_1S = sine \text{ નો તફાવત } = \frac{P_0 \text{ એ } cosine \text{ ચાપ } x \text{ ચાપમાં વધારો}}{\text{ત્રિજ્યા } r}$$

હાલના સંકેતો (Notation) વાપરતાં,

$$d\,(r \;\; sina) = (r \;\; cosa)\frac{da}{r}$$

આ જ રીતે,

$$P_0S = cosine \text{ નો તફાવત } = \frac{P_0 \text{ એ } sine \text{ ચાપ } x \text{ ચાપમાં વધારો}}{\text{ત્રિજ્યા } r}$$

$$= r \;\; sina$$

$\frac{da}{r}$ P_0P_1 CP

હાલના સંકેતો વાપરતાં,

$$d\,(r \;\; cosa) = r \;\; sina$$

આ બંને પરિણામો વારંવાર વપરાય છે.

(2) *sine* ના તફાવતના તફાવત = *r cosa* અને

cosine ના તફાવતના તફાવત = *r sina* આપણે સાબિત કરીશું.

આ પરિણામ યુક્તિભાસના પાન 173 અને નિલકંઠ સોમયાજીના આર્યભટિઆ ભાષ્યમાં પાન 51-53માં પણ આપેલું છે.

બીજો *sine* નો તફાવત = બે *sine* ના તફાવતો વચ્ચેનો તફાવત

= બીજો *sine* નો તફાવત − પહેલો *sine* નો તફાવત

= $d\,(r \;\; sina)$ બીજો − $d\,(r \;\; sina)$ પહેલો

= *cosine* chord of the second × −

cosine chord of the first ×

$= (cosine$ chord of the second $-$

$cosine$ chord of the first$) \times$

$= cosine$ નો તફાવત $\times$

$= r\ sina \quad \times$

$= r\ sina$

આ જ રીતે,

બીજો $cosine$ નો તફાવત = બે $cosine$ ના તફાવતો વચ્ચેનો તફાવત

= બીજો $cosine$ નો તફાવત – પહેલો $cosine$ નો તફાવત

= $d(r\ cosa)$ બીજો – $d(r\ cosa)$ પહેલો

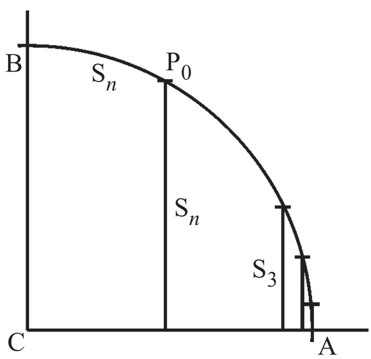
= બીજો $sine$ chord $\times$ – પહેલો $sine$ chord $\times$

= (બીજો $sine$ chord – પહેલો $sine$ chord) $\times$

= $sine$ નો તફાવત $\times$

$= r\ cosa$

હવે આપણે ચાપ અને સાઇન (જ્યા) વચ્ચેના તફાવતનું સૂત્ર મેળવીશું :



આકૃતિ 5

ચાપ AP_0 ને n સરખા ભાગમાં આકૃતિ 5 માં બતાવ્યા પ્રમાણે ભાગો. ચાપ AP_0 ની લંબાઈ a છે અને n સરખા ભાગની લંબાઈ = Δa છે. આ બિંદુઓએ S_1, S_2,..., S_n sin (જ્યા)ની કિંમતો છે અને આ બિંદુઓએ ΔS_1, ΔS_2,... સાઇનની કિંમતોનો તફાવત છે.

$\Delta S_1 = S_1 - 0 = S_1$

$\Delta S_1 - \Delta S_2 = S_1$

$\therefore \quad \Delta S_2 = S_1 - S_1 \frac{da}{r}^2$

$\Delta S_2 - \Delta S_3 = S_2 \frac{da}{r}^2$

$\therefore \quad \Delta S_3 = \Delta S_2 - S_2 \frac{da}{r}^2 = S_1 - S_1 \frac{da}{r}^2 - S_2 \frac{da}{r}^2$

આ જ રીતે,

$\Delta S_n = S_1 - S_1 \frac{da}{r}^2 \ldots - S_{n-1} \frac{da}{r}^2$

આ બધાનો સરવાળો,

$\overset{n}{\underset{k \quad 1}{}} \Delta S_k = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots + \Delta S_n$

$= S_1 + \qquad +\ldots+ S_1 - S_1 \qquad \ldots - S_{n-1} \frac{da}{r}^2$

$\frac{da}{r}^2 \; S_1 \frac{da}{r}^2$

$= nS_1 - \{(n-1) S_1 + (n-2) S_2 + \ldots + 2S_{n-2} + S_{n-1}\} \frac{da}{r}^2$

$= \{S_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \ldots + (S_n - S_{n-2})\} = S_n$

$\therefore \qquad S_n = nS_1 - \{(n-1) S_1 + (n-2) S_2 + \ldots + S_{n-1}\} \frac{da}{r}^2$

જો n ખૂબ જ મોટો હોય, તો સૌથી પહેલો સાઇન (જ્યા) S_1 અને સૌથી પહેલો ચાપ સરખા થશે. આથી nS_1 = ચાપ $AP_0 = a$ થશે. આથી આખી ચાપ $AP_0 - S_0$

(3) $= \{(n-1) S_1 + (n-2) S_2 + \ldots + 2S_{n-2} + S_{n-1}\} \frac{da}{r}^2$ છે.

હવે આપણે ચાપ a ની ઊંચાઈ મેળવીએ.

cosine ના તફાવતના સરવાળા $= S_1 \frac{da}{r} + S_2 \qquad + \ldots + S_n$

$= \qquad \{S_1 + S_2 + \ldots + S_n\}$

જો આપણે અજાણી જ્યા S_i બરાબર ચાપ $i\delta a$ લઈએ અને $da = 1$ લઈએ અને $S_n = S_a$ હોઈને,

cosine ના તફાવતના સરવાળા = $\{1 + 2 + 3 + ... + a\}$

=

(4) આથી ચાપ a ની ઊંચાઈ = = H

'યુક્તિભાસ'માં ΔS_1 ને મેળવવાની બીજી રીત આપી છે.

$\Delta S_1 = C_{m_1}$ જ્યાં, C_{m_1} *cos* (જ્યા) પહેલી ચાપના મધ્યબિંદુએ છે એ એની આશરે કિંમત C_{m_1} $(r - h_1)$ જ્યાં, h_1 પહેલી ચાપના મધ્યબિંદુની ઊંચાઈ દર્શાવે છે. આથી,

ΔS_1 $|r - h_1|$ છે. આ જ રીતે ΔS_2 $|r - h_2|$ ...,

$\Delta S_n = |r - h_n|$ થાય.

$\therefore$ $\Delta S_1 - \Delta S_n = |r - h_1 - r + h_n| = |h_n - h_1|$.

જો n ઘણો મોટો હોય, તો યુક્તિભાસમાં જણાવ્યા મુજબ h_1 ની આશરે કિંમત 0 છે અને h_1 = H છે. આથી,

$\Delta S_1 - \Delta S_n = H = = da$ થાય.

જો $da = 1$ હોય, તો $\Delta S_1 - \Delta S_n =$, આ જ રીતે,

$\Delta S_1 - \Delta S_{n-1} =$, $\Delta S_1 - \Delta S_{n-2} = \frac{(a \quad 2)^2}{2r^2}$

ચાપ – સાઇન (જ્યા) = $\sum_{i \quad 1}^{n} (\Delta S_1 - \Delta S_i)$

$= \{a^2 + (a - 1)^2 + ... + (a - i)^2 + 1\}$

$= dx\ (x^2) =$

=

(5) ચાપ a ની ઊંચાઈ મેળવવા માટે આપણે (3)માં ઊંચાઈ = $\{1 + 2 + 3 + ... + a\}$ મેળવેલી. (4)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ચાપ – સાઇન (જ્યા)નો તફાવત હોઈને, તે આપણે (3)માંથી બાદ કરવો પડે. આથી, ચાપની ઊંચાઈ માટે,

$= \quad \{a + (a - 1) + (a - 2) + ... + 1\} -$

આથી ચાપની ઊંચાઈના નિવેદનમાં સુધારાની રકમ

$- \quad \{a^3 + (a - 1)^3 + (a - 2)^3 + ... + 1^3\} = - \quad x^3\, dx$

$= - \quad a^4$ છે.

આપણે (4) માં ચાપ-સાઇન (જ્યા) $= \quad \{a^2 + (a - 1)^2 + ... + 1\}$ મેળવેલું.

આપણે ઊંચાઈના નિવેદનમાં $- \quad a^4$ મેળવ્યું. આથી,

ચાપ-સાઇન (જ્યા) =

$= \frac{1}{2r^2} \{a^2 + (a - 1)^2 + ... + 1^2\} - \quad \{a^4 + (a - 1)^4 + ... + 1^4\}$

$(a\ (a)^2\ 1)^3 \quad \frac{1}{2r^2\, 3!\, r^2\ 4!\, r^4} \quad (a \quad 1)^4$

$= \quad \{a^2 + (a - 1)^2 ...\} - \quad x^4\, dx$

$= \quad x^2\, dx - \quad x^4\, dx$

$= \quad . \quad -$

આ સુધારો જ્યારે કરીએ ત્યારે,

ચાપ $a - sin$ (જ્યા) $= \quad -$

આ સુધારો જ્યારે કરે જઈએ, ત્યારે

ચાપ $a - sin$ (જ્યા) $= \quad - \quad +$

sin (જ્યા) $= a - \quad + \quad - \quad + ...$

$r\ sin\,\theta = r\theta -\qquad + \qquad - \qquad +\ldots$

$\therefore\quad sin\,\theta = \theta - \qquad + \qquad - \qquad +\ldots$

cos (જ્યા) $= r -$ ચાપની ઊંચાઈ

$= r -$

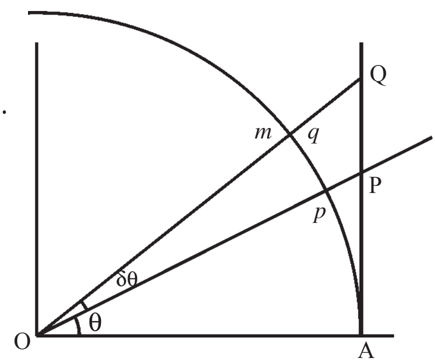
$r\,cos\,\theta = r - \qquad + \qquad - \qquad \ldots$

$= r - \qquad + \qquad - \qquad \ldots$

$\therefore\ cos\,\theta = 1 - \qquad + \qquad - \qquad \ldots$

$tan^{-1}\,\theta$ ની ઘાત શ્રેણી :

કલનગણિતની રીતે ઘાત શ્રેણી સરળતાથી મેળવી શકાય.
A*pq* વર્તુળની ચાપ છે અને OA ત્રિજ્યા બરાબર 1 છે.



આકૃતિ 6

$\delta\theta =$ ચાપ $pq = pm =$

$t = tan\,\theta$ લઈએ.

$\therefore\quad \theta = \dfrac{dt}{1 \quad t^2}$

$=$

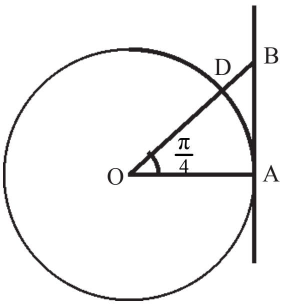
$= t - \qquad + \qquad - \qquad + \ldots$

$\therefore\quad \theta = tan^{-1}\,t = t - \qquad + \qquad - \qquad + \ldots$ જો $|\,tan\,\theta\,| \le 1$

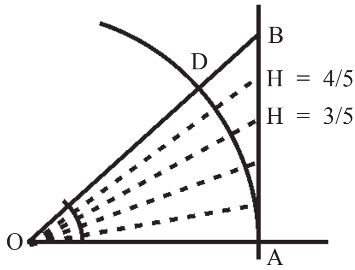
જો $\theta =$ હોય, તો $t = tan \qquad = 1$ હોઈને,

$= 1 - \qquad + \qquad - \qquad \ldots$ છે. (**)

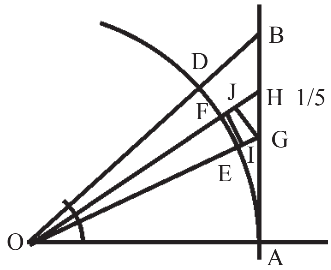
(**) કઈ રીતે કેરાલાની શાળાએ અથવા માધવે મેળવેલું તે જોઈએ.



આકૃતિ 7(a)



આકૃતિ 7(b)



આકૃતિ 7(c)

આકૃતિ 7(a) માં ત્રિજ્યા OA = 1 અને $\angle AOB =$ વાળુ વર્તુળ છે. સ્પર્શક AB, A બિંદુએ છે. ચાપ AD = = છે. આકૃતિ 7(b) માં ચાપ AD ના પાંચ સરખા ભાગ કર્યા છે. આપણે સરળતા માટે પાંચ ભાગ કર્યા છે. G માંથી GJ, OH ઉપર લંબ દોરીએ. F બિંદુએ વર્તુળને સ્પર્શક FI દોરીએ જે OG ને I બિંદુ છેદે છે. આપણે ચાપ EF જે બે સુરેખાઓ OG અને OH વચ્ચે આવેલી છે તેની કિંમત મેળવીએ.

Δ^S GHJ અને OAH માં

$\angle JHG = \angle OHA$

$\angle OAH = \angle HJG = 90^o$

હોઈને બંને સમરૂપ (similar) છે.

$\therefore$ = OA = 1 અને HG = હોઈને

GJ = થાય.

Δ^S OFI અને OJG માં

$\angle HOG = \angle FOE$

$\angle GJO = \angle IFO = 90^o$

હોઈને બંને સમરૂપ છે.

$\therefore$ = $\therefore$ FI =

n = 5 ના બદલે n ની જ્યારે મોટી કિંમત હોય, ત્યારે OH OJ લઈએ.

$\therefore$ FI = .

; $OH^2 = OA^2 + (AH)^2$

$= 1 +$

$\therefore$ arc EF FI =

આથી, ચાપ AD ની લંબાઈ $= \frac{\frac{1}{5}}{1 \quad \frac{1}{5}^2} + \frac{\frac{1}{5}}{1 \quad \frac{2}{5}^2} + \frac{\frac{1}{5}}{1 \quad \frac{3}{5}^2} + \frac{\frac{1}{5}}{1 \quad \frac{4}{5}^2} + \frac{\frac{1}{5}}{1 \quad \frac{5}{5}^2}$

જો $n = 5$ ના બદલે n જ રાખીએ, તો

ચાપ AD ની લંબાઈ = + +...+ +

=

આપણે જાણીએ છીએ,

$= 1 + r + r^2 ... + ...$ $|r| < 1$. આમાં $r = -s$ મૂકતાં

$= \quad = 1 - s + s^2 - s^3 + ...$ મળે.

$= 1 - \quad + \quad - \quad + ...$ વગેરે.

આથી,

ચાપ AD ની લંબાઈ =

$+ 1 - \frac{2}{n}^{2} + \quad - \quad ...$

$+$

$= \quad \{(n - 1)\} - \quad \{1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n - 1)^2\}$

$+ \quad \{1^4 + 2^4 + ... + (n - 1)^4\} - \quad \{1^6 + 2^6 + ... + (n - 1)^6\}$

આપણે જાણીએ છીએ,

as $n \to \infty$. આથી,

$= \quad ,$, વગેરે.

આથી, AD ની લંબાઈ $= 1 - \quad + \quad - \quad + ... =$

$\therefore \quad = 1 - \quad + \quad - \quad + ...$

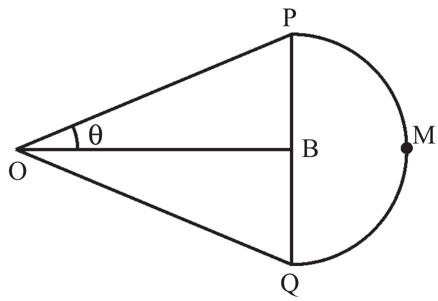
આ લેખ નીચેનાં પુસ્તકોના આધારે લખ્યો છે :

(1) Joseph G. G. : Indian Mathematics : enganging with the world from ancient to modern times, World Scientific Publishing Europe LTD., 2016

(2) Joseph G. G. : A passage to infinity : medieval Indian mathematics from Kerala and its impact, Sage Publication LTD., 2009
(3) Puttaswamy T.K. : Mathematical Achievements of Pre-modern Indian Mathematicians, Elsevier, 2012

પરિશિષ્ટ (Appendix)

હિન્દુ ત્રિકોણમિતિ (Hindu Trigonometry)



આપણે સાઇનનો (*sine*) અર્થ શું તે જોઈએ.

PMQ વર્તુળની ચાપ (arc) છે અને વર્તુળનું કેન્દ્ર O છે. M ચાપ PQ નું મધ્યબિંદુ છે. PMQ નો આકાર ચાપ અથવા ધનુષ્ય જેવો છે. Chord PQ, P અને Q ને જોડતી સુરેખા છે. તેને સંસ્કૃતમાં જ્યા કહેવામાં આવે છે. સમય જતાં PB ને જ લોકો જ્યા કહેતા થઈ ગયા. આ PB જ્યા તે જ હિન્દુ સાઇન (H*sine*). જો $\angle POM = \angle\theta$ હોય, તો

જ્યા $(\theta) = PB = R\sin\theta = H\sin\theta$ જ્યાં, R વર્તુળની ત્રિજ્યા છે. આનો અર્થ એ કે Hindu $\sin\theta$ બરાબર હાલનો *sine* ગુણ્યા R છે. સામાન્ય રીતે R ની કોઈ ચોક્કસ કિંમત લેવાય છે.

આરબોએ જ્યારે ભાષાંતર કર્યું ત્યારે તેમના હાથમાં જ્યાનો બીજો 'જીવા (Jiva)' 'જીવા (Jiba)' બન્યો અને એરેબીકમાં 'Jiab' બન્યો. જીઆબના જેવો જ એરેબીક ભાષામાં શબ્દ છે, જેનો અર્થ હૃદય છે. રોમનોના હાથમાં આ બન્ને શબ્દો અદલબદલ થઈ ગયા અને જ્યા બન્યો Sinus (હૃદય). આ રીતે 'જ્યા' બન્યો '*sine*'.

જ્યા $\theta = R\sin\theta = PB$

કોટિજ્યા $\theta = R\cos\theta = OB$

હવે, $MB = OM - OB = R - R\cos\theta = R(1 - \cos\theta) =$ ઉત્તક્રમજ્ય θ

Utkramajya $\theta = MB = R(1 - \cos\theta)$

જો P ના યામ (x, y) હોય, તો

$PB = R\sin\theta = y$

$OB = R\cos\theta = x$

$\sin \underset{(\text{Jya})}{\overset{PB}{}} = s = R\theta = R\sin\theta$

Indian *sine* is not a ratio but a linear measure.

$MB = OM - OB = R - R\cos\theta = R(1 - \cos\theta)$

વિઠ્ઠલભાઈ અં. પટેલ
'સ્વરાજ', નરસિંહજી મંદિર પાસે, ઉવારસદ રોડ, મુ.પો. શેરથા, તા.જી. ગાંધીનગર મો. ૯૪૨૮૦ ૧૯૦૪૨